ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502991258011

Титульный лист

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия РАСПОПОВ

Имя ТИМОФЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 04 02 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 325

Телефон +79505477878

Дата 01 03 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502991258011

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 0 2

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	0	1	9	0	3	1	8	1	0
Балл члена жюри №2	0	0	1	9	0	3	1	8	1	0

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 0 5 0

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание №4:

$2022_2 = 11111100110_2$

$1_2 = 00000000001_2$

Рассмотрим отдельно первый бит; у нас будет 2 случая:

1) бит не поменяли, а значит Хог-к минимально в сумме дали 0. Получается минимум, если не изменять данный бит по пути.

2) бит поменяли, тут бы пояснить, что биты можно независимо рассматривать, а значит Хог-к минимально в сумме дали 2^{n-1}, где n номер бита (нумерация с 1). Меньший переход совершить нельзя, т.к. в данном варианте применяется хог != 0 хотя бы 1 раз (это является минимумом, т.к. нам в итоге нужно поменять бит.)

Получаем по данной схеме Ответ: 1024 + 512 + + 128 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1 = 2023

(+) 18 баллов.

Ответ: 2023

Задание №5:

1. д-ть, что S_{k-1} префикс S_k

Докажем по индукции:

База: $S_0 = a$
$S_1 = abb$
$S_2 = abbbaaba$ | Работает

Предположение: Утверждение работает для всех S_k, где $k = 0 \dots n$

Задание №5 (продолжение):

Шаг индукции к $n+1$:

S_{n-1} является префиксом S_n по предположению

и $f(S_{n-1}) = S_n$ по определению

Получается, что $f(S_n) = f(S_{n-1}) + f(N)$, где N – какая то строка.

$$f(S_n) = \underbrace{S_n}_{\text{префикс}} + f(N) = S_{n+1}$$ (+)

Префикс S_{n+1} включается S_n ч.т.д.

2. S – бесконечное $f(S_0)$. Найти кол-во подстрок.

Рассмотрим шаг $f()$:

Есть 4 варианта комбинаций 2 символов:

ab → abbbaa

bb → baabaa

aa → abbaabb

ba → baaabb

(+)

Поймем, что нам хватит 2 символов для всех вариантов т.к. они создают блоки длины 3 (по условию), а длина подстроки 4, значит в подстроку войдут 2 блоков

Подсчитаем кол-во различных подстрок: 12

Ответ: 12

Задание №2:

1. Очевидно, что gcd(a, b) не может быть > a и > b. (по определению gcd) ✓

Значит $y_i \le n$ всегда.

При том gcd(x, 9) не может иметь никаких делителей, кроме 1, 3, 9 (делители 9) (по определению gcd).

Просто подставим x_i и y_i:

3 балла (+)

$n = 9$

x_i:	1	2	3	6	9	....
y_i:	1	1	3	3	9	....

А почему оно не уменьшается?

Как видно мы получили все возможные варианты y_i. А дальше есть.

Ответ: $y \in \{1; 3; 9\}$

2. Заметим, что y_i все время неубывает и при том делится на все y_j, $j \le i$.

Докажем неубывание:

Метод от Противного: y_i уменьшилось от y_{i-1}, т.е.

$\gcd(x_i, n) < \gcd(x_{i-1}, n)$, а

$x_i = x_{i-1} + \gcd(x_{i-1}, n)$.

Получаем:

$$\gcd(x_{i-1} + \gcd(x_{i-1}, n), n) < \gcd(x_{i-1}, n).$$

Это невозможно т.к. $x_{i-1} + \gcd(x_{i-1}, n) \vdots \gcd(x_{i-1}, n)$, сумма точно делится, если оба слагаемых делятся:

x_{i-1} точно делится (по определение gcd), а 2 слагаемое точно.

Значит y_i неубывают.

Дополнительный лист №1

Задание №2 (продолжение):

Докажем, что $y_i \vdots y_j$, если $j \le i$:

Метод от Противного: $y_i \not\vdots y_j$.

y_i мы получили прибавляя $\gcd(x_j, n)$, а мы (или есть больше делителей чем, но вначале y_i) y_j

Как-то потеряли делитель прибавляя его, что невозможно.

Значит $y_i \vdots y_j$, если $i \le j$.

Тут не очевидно, что мы вообще доберёмся до какого-то одного числа

Рассмотрим ситуацию, что мы к x_i $\gcd(x_i, n)$, чтобы $x_i + 1$ и т.д. и $\gcd(\,)$ не меняется даже при бесконечном кол-ве действий. Значит 1) мы нашли $x_i \vdots n \Rightarrow y_i = n$ или 2) мы никогда не найдем такой y_i под ответ.

2) Вариант - это единственные числа, которые не подходят

2 вариант никогда невозможен, т.к. мы все время прибавляем $\gcd(x_i, n)$, т.е. (но условно добавляем $\gcd(x, n)$)

$x = k \cdot \gcd(x, n) \to x = (k+1) \cdot \gcd(x, n) \to x = (k+2) \cdot \gcd(\,)$ и т.д.

Заметим, что k + любое число когда-нибудь будет делителем n, что удовлетворит 2 варианту.

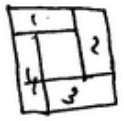
Ответ: при любых числах.

Дополнительный лист №2

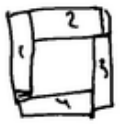
Задание №3:

1. $n = 1$.

Ответ: 2 варианта: (1)



(2)



(+)

1 дополнение для 1 варианта.

2. $n = 2$:

посмотрим крайний левый-верхний и правый-верхний, в них 2 варианта дополнить => 4 варианта в общем. В 2 из них 2 варианта, в 2 других 1 вариант.

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$

Ответ: 6 вариантов (+)

Задание №1:

1. 2 игрок победит всегда, т.к.:

1 ход делается напротив пешки 1.

2 ход имеет 2 варианта:

1) 2 пешки рядом → рубим

2) 2 пешки не рядом → зеркально. (−)

~~Ход~~

1 вариант → 1) новая пешка рядом со старой 1

2) новая пешка не рядом со старой 1

2 вариант → рубим и 1 гарантированно победа

1.1. → ...

1.2 → ...