ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502423020915

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия ЯВОРСКИЙ

Имя ДАНИИЛ

Отчество ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 06 06 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 425

Телефон 89043831737

Дата 26 02 2022 **Подпись** Явор-

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502423020915

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	00	00	00					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	0					
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 40

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1 (+)

Представим трёхзначное число, как $\overline{abc}$, где a - 1-я цифра, в - 2-я цифра, с - 3-я цифра. Рассмотрим $\overline{abc}^3$. Умножая $\overline{abc}$ на само себя столбиком, заметим, что последняя цифра $\overline{abc}^2$ - это $c^2 \bmod 10$. (mod - остаток от деления на 10):

$$\begin{array}{r} \times\ \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ + \ \dots\dots(c^2 \bmod 10) \\ \hline \dots\dots(c^2 \bmod 10) \end{array}$$

- то есть при первом умножении $\overline{abc}$ на с последняя цифра - $c^2 \bmod 10$, которая в итоге при сложении беспрепятственно сносится вниз и остается в конечном результате.

Таким образом, аналогично при умножении $\overline{abc}^2$ на $\overline{abc}$, последняя цифра будет $(c^2 \bmod 10) \cdot c \bmod 10$, т.е. $c^3 \bmod 10$. Так как по условию все цифры различны и стоят по возрастанию, то нетрудно заметить что минимально допустимое число 123, а с может принимать значения от 3 до 9. Посчитаем все возможные последние цифры $\overline{abc}^3$, то есть $c^3 \bmod 10$:

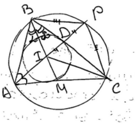
$3^3 \bmod 10 = 7$ $5^3 \bmod 10 = 5$ $7^3 \bmod 10 = 3$ $9^3 \bmod 10 = 9$

$4^3 \bmod 10 = 4$ $6^3 \bmod 10 = 6$ $8^3 \bmod 10 = 2$

Так как 123 - наим. число, то 123^3 - наим. куб. $123^3 = 1860867$. То есть в числе $\overline{abc}^3$ как минимум 7 разрядов, то есть последняя цифра может быть в диапозоне от 7 до 9 (наим. 7-знач. число с возраст. цифрами 1234567), а значит, по предыдущим вычислениям с может быть равно 3 или 9. Так как с с=3 существует единственное число 123, которое мы уже проверили и оно не подходит, то с = 9. Как мы помним по условию $\overline{abc}^2$ тоже должно иметь разные цифры в порядке возрастания, но последняя цифра $\overline{abc}^2$ это $9^2 \bmod 10$, то есть 1. Очевидно, что если в конце 1, а кол-во разрядов больше чем 1, то такого числа не получится. Следовательно его не существует.

Ответ: не существует.

~~[illegible]~~. №3.



Дано:
△ABC – не р/б.
AD – бис-са
I – ц. вписанной окр.
P ∈ описанной окр.
ID = DP

$\frac{AI}{DI}$ – ?

I – ~~[illegible]~~ центр вписанной окр ⇒ I – т. пересечения всех бис-с △.
BM – бис-са ⇒ I ∈ BM
в △ABD по св-ву бис-с, бис-са BI делит AD на

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD}$$

~~Аналогично с бис-сой CI в △ ADC~~

$$\cancel{\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{DC}}$$

т.к. $\angle BAP = \angle PAC$, то $\smile BP = \smile PC$ и хорды $BP = PC$.

a $S_{ABI} = \sin\alpha \cdot BI \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$
$S_{BID} = \sin\alpha \cdot BI \cdot BD \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{S_{ABI}}{AB} = \frac{S_{BID}}{BD} \qquad \frac{AB}{BD} = \frac{S_{ABI}}{S_{BID}} = \frac{AI}{DI}$$

всё верно, но к решению не ведёт

0

№2.

Представим девятизначное число палиндром, как $\overline{abcdedcba}$. Число является почти палиндромом, если в нём можно изменить 1 цифру так, чтобы оно стало палиндромом. То есть существует число f, которое стоит вместо какой-то из a, b, c, d, которое не равно второй оставшейся букве. Так как если мы будем рас-ивать замену всех букв a, b, c, d, то у нас варианты будут повторятся (т.е. множество чисел, подходящих под маску $\overline{afedcdeba}$ и под маску $\overline{abcdedcfa}$ это одинаковые множества) то рас-им ~~…~~ только варианты замены второго элемента пары. У нас есть 6 цифр a, b, c, d, e, f. При этом, в зависимости от того, на чьём месте стоит f, она не равна a, b, c или d. Так же заметим, что $a \geq 1$, т.к. если $a = 0$, то кол-во разрядов < 9. Таким образом, у нас 9 вариантов выбрать a по 10 вариантов выбрать b, c, d, e и 9 вариантов выбрать f во всех случаях, даже когда она заменяет a, т.к. $f \neq a$, но ~~f~~ может быть равна нулю. Следовательно кол-во способов выбрать a, b, c, d и f ~~…~~ равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9$. Но т.к. у нас есть f, которая может встать на 1 из 4 позиций, то весь полученный результат нужно умножить ещё на 4.

$9^2 \cdot 10^4 \cdot 4 = 81 \cdot 10000 \cdot 4 = 3240000$ +

Ответ: 3 240 000 девятизначных почти палиндромов существует.

№4.

Пусть $m = ab$, $n = cd$, где a - наим. дел. >1, b - наиб. дел. $< m$; c - наим. дел. >1, d - наиб. дел. $< n$.

Тогда $\begin{matrix} ab = c+d \\ cd = a+b \end{matrix}$, при этом a и c - простые числа, иначе был бы делитель меньше чем a и c соответственно, и b не имеет делителя меньше чем a, d не имеет делителя меньше чем c по той же самой причине.

$ab \neq cd$ по условию. нет продолжения решения

⊖

Бланк ответов

№5. $a+b+c=1$

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{(ab+a+b+1)(c+1)}{abc+1} =$$

$$= \frac{abc+ac+bc+c+ab+a+b+1}{abc+1} = \frac{abc+1}{abc+1} + \frac{ac+bc+ab+a+b+c+}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{ac+bc+ab+1}{abc+1} = 1 + \frac{b(a+c)+ac+1}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{(1-a-c)(a+c)+ac+1}{abc+1} = 1 + \frac{a+c-a^2-ac-ac-c^2+ac+1}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{a+c-a^2-c^2-ac+1}{abc+1}$$

т.к. a, b, c - положительные и $a+b+c=1$,
то $a \in (0;1)$; $b \in (0;1)$; $c \in (0;1)$

см