ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502974014847

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☒ математика
	☐ обществознание	☐ политология	☐ русский язык
	☐ социология	☐ физика	☐ химия
	☐ филология		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Фамилия БУРКОВ

Имя ДЕНИС

Отчество ОЛЕГОВИЧ

Дата рождения 04 03 2005

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 425

Телефон 9227588148

Дата 26 02 2022 **Подпись** Бурков

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502974014847

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	12	20	00	00	00					
Балл члена жюри №2	12	20	0	0	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 32

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задача № 2 (+) пол.л — это палиндром

Заметим, что 9-значных палиндромов у нас $9\cdot10^4$.
(т.к.

$$\overline{9}\cdot\overline{10}\cdot\overline{10}\cdot\overline{10}\cdot\overline{10}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1} = 9\cdot10^4)$$

Для каждого палиндрома, существует $(8+9\cdot7)$ почти палиндромов, которые превращаются в него. (т.к. изменить мы можем 1 символ, а при изменении центрального числа останется палиндромом, то получим 8 (для 1 символа) $+ 9\cdot7$ (для всех остальных кроме центра) $+ 0$ (для центра)

$8+9\cdot7=71$. Однако, существуют такие почти палиндромы, которые, заменой 1 символа, могут превращаться в несколько разных палиндромов. Но т.к. мы можем менять лишь 1 символ, то эти палиндромы отличаются в 2 символах (симметричных относительно центра). Для каждого палиндрома существует $8+9\cdot4=35$ таких палиндромов, то есть мы посчитали $35\cdot(9\cdot10^4)$ лишних почти палиндромов. То есть всего 9 значных почти палиндромов $71\cdot(9\cdot10^4)-35\cdot(9\cdot10^4) = 36\cdot(9\cdot10^4)$

Ответ: $36\cdot9\cdot10^4 = 324\cdot10^4$

Задание №1

~~пусть~~ предположим, что такое число существует, тогда пусть $\overline{abc}$ – это число. $a < b < c \Rightarrow c \geq 3$

Заметим, что $(123)^2 = 15129$ $(123)^3 = 1860877$

$(789)^2 = 272458$ $(789)^3 = 214969362$

Заметим, что, т.к. $(123)^3 > 1234567$, то возможное число (далее x) x^3 будет иметь 8 или 9 разрядов.

также заметим, что $\sqrt[3]{10^8} < \sqrt[3]{123456789} < \sqrt[3]{125000000} < 500$

$\Rightarrow a = 4$ $400 <$

также заметим, что на последнюю цифру влияет только c, а c^3 оканчивается на 9, это $c = 9$

~~также~~ $\cancel{\sqrt[3]{(450)^3}} \cancel{< \sqrt[3]{123456789}} \cancel{= 3\ 625}$

c	c^3	c^2
0	000	00
1	001	01
2	008	04
3	027	09
4	064	16
5	125	25
6	216	36
7	343	49
8	532	64
9	729	81

$c < 3$

X^2 – кол-во 4 знака

1 2 3 4   4, 5, 6, 7, 8, 9

$\Downarrow$

$c \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

X^3 – кол-во 8

1 2 3 4 5 6 7 8

~~$c \in \{ 2 \}$~~

$c \in \{9\} \Rightarrow c = 9$ – для всех чисел (если они есть),

но при $c = 9$ X^2 оканчивается на 1, что меньше $\Rightarrow$ наше утверждение не верно и таких чисел нет.

Задание №1

Метод от противного:

предположим, что такие числа существуют, ~~пусть~~

обозначим такое число за $\overline{abc}=x$, $a<b<c$, тогда $c\geq 3$

Заметим, что в числе $(\overline{abc})^2$ и в числе $(\overline{abc})^3$ на последнюю цифру влияет только c, а именно на ~~на~~ $(\overline{abc})^2$ влияет c^2, а на конец $(\overline{abc})^3$ влияет c^3.

Заметим, что $(123)^2 = 15129$ $(123)^3 = 1860877$

$(789)^2 = 272468$ $(789)^3 = 214969362$

$123 < \overline{abc} < 789$.

Заметим, что в x^2 не менее ~~6~~ 5 разрядов и не более 6 => в x^2 6 разрядов. а это значит, что последняя цифра в x^2 не менее ~~6~~ 5

пример

Заметим, что в x^3 не менее ~~8~~ 7 разрядов и не более 9.

Значит в конце x^3 не менее 87

c	c^2	c^3
0	0	0
1	1	1
2	4	8
3	09	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

$c \geq 3$

c^2 оканчивается не менее чем на 6

$c \in \{3, 4, 6, 7\}$.

c^3 оканчивается не менее, чем на 8

$c \in \{9\}$.

Противоречие, т.к. $c=9$, но $9^2 = 8\boxed{1}$ $1<6$

Значит, наше предположение не верно и такого числа не существует.

±

Задача 5 $\quad a+b+c=1$

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{abc+ab+ac+bc+1}{abc+1} =$$

$$= 1 + \frac{ab+ac+bc+1}{abc+1} \quad \vee$$

$$\begin{cases} 0<a<1 \\ 0<b<1 \\ 0<c<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<a\cdot b<1 \\ 0<a\cdot c<1 \\ 0<b\cdot c<1 \end{cases}$$

$$0<a\cdot b\cdot c<1$$

$$0<ab+ac+bc+1<4$$

$$0<a\cdot b\cdot c+1<2$$

$$ab+ac+bc+1<4$$

$$-\ \ 2(abc+1)<4$$

$$\cancel{ab+ac+bc+1-2(abc+1)<0}$$

$$ab+ac+bc+1<2(abc+1)$$

делить нер-ва // нельзя !

$$0<\frac{ab+ac+bc+1}{abc+1}<2$$

—

$$1<1+\frac{ab+ac+bc+1}{abc+1}<3$$

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{3}$

$$1+\frac{\frac{2}{3}\cdot 3+1}{\frac{1}{27}+1} = 1+\frac{3}{\frac{28}{27}} = 1+\frac{27\cdot 3}{28}$$

Ответ: $1+\frac{81}{28}$