ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502889017148

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☑ 10 ☐ 11

Фамилия ИГОШЕВА

Имя ЮЛИЯ

Отчество ПЕТРОВНА

Дата рождения 21 12 2004

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 438

Телефон 89089204160

Дата 26 02 2022 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502889017148

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] политология
- [ ] русский язык
- [ ] социология
- [ ] физика
- [ ] химия
- [ ] филология

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	00	00	03					
Балл члена жюри №2	20	20	0	0	3					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 43

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

N1.

$\overline{abc}$ $a<b<c$

Заметим, что для 3х значного числа min. квадрат имеет 5 разрядов ($100 \cdot 100 = \underbrace{10000}_{5\ \text{цифры}}$), а min. куб имеет 7 разрядов

($100 \cdot 100 \cdot 100 = \underbrace{1000000}_{7\ \text{цифр}}$)

min цифра в конце квадрата – 5

($\underbrace{12345}_{5\ \text{цифр}}$)

по этому критерию.

min цифра в конце куба 7.

($\underbrace{1234567}_{7\ \text{цифр}}$)

Напишем таблицу последней цифры куба и квадрата для всех натуральных однозначных чисел.

n	n^2	n^3
1	1	1
2	4	8
3	9	7
4	6	4
5	5	5
6	6	6
7	9	3
8	4	2
9	1	9

Заметим, что из всех n нам подходит только 3, а значит, что только 3 может быть последней цифрой числа, а такое 3значное число, допустимое условием задачи, только 1 – 123

Но заметим, что $123^2 = 15129$ – ~~числа~~ цифры не в порядке возрастания

+

Такого числа не существует

№2.

abcdefghi Заметим, что условие неясно сформулировано, поэтому рассмотрим 2 варианта: 1) Данное число не палиндром N

2) Данное число может быть палиндромом, тогда в палиндроме можно поменять среднюю цифру на любую из оставшихся 9, число все еще будет палиндромом.

I. Вариант:

Данное число не палиндром.

$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} a=i \\ b=h \\ c=g \\ d\neq f \end{cases} \\ 2)\begin{cases} a=i \\ b=h \\ c\neq g \\ d=f \end{cases} \\ 3)\begin{cases} a=i \\ b\neq h \\ c=g \\ d=f \end{cases} \\ 4)\begin{cases} a\neq i \\ b=h \\ c=g \\ d=f \end{cases} \end{array}\right.$$

Можно выбрать $a, b, c \to i, h, g$ подберутся автоматически

~~Можно выбрать~~

1) Можно выбрать $a, b, c \to i, h, g$ подберутся автоматически

для a: 9 вариантов (все числа кроме 0)

для b и c 10 вариантов

e может быть любым: 10 вариантов

d может быть любым: 10 вариантов

f может быть любым, КРОМЕ $f=d \Rightarrow$ 9 вариантов

ВСЕГО: $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot9=810000$

Аналогично для 2 и 3 случая.

4) b, c, d, e могут быть любыми: 10 вариантов

a: 9 вариантов (все числа кроме 0)

i: 9 вариантов (все числа кроме a)

Всего $9^2\cdot10^4=810000$

Тогда всего возможных вариантов $N_{I}=810000\cdot4=\underline{3240000}$

II Вариант: Данное число может быть палиндромом, тогда

$N = N_{\text{из I варианта}} + N_{\text{число палиндромов}}$

$N_{\text{число палинд.}} = 10^4\cdot9 = 90000 \Rightarrow N_{II} = 3240000+90000 = \underline{3330000}$

10^4: b, c, d, e - любые (f, g, h - подбираются автоматически)

9: a все кроме 0 (i - автоматически $=a$)

N4. Условие сформулировано не очень корректно:

~~I Вариант:~~ Т.к ~~и~~ наибольший натуральный делитель числа — само число. (невыполнимо условие)

Поэтому решим два варианта задачи

I) наибольший натуральный делитель числа = само число

II. наибольший натуральный делитель числа ≠ самому числу.

I.

$$\begin{cases} \min n + \underset{=m}{\max m} = n \\ \min m + \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\max n} = m \end{cases}$$

БОО $m > n$:

$n - m = \min n < 0$

невозможно т.к делитель натуральный

⇓ Таких пар нет

II.

$$\begin{cases} \min^m n + \max m = n \\ \min^n m + \max n = m \end{cases}$$

неверно показ условие

Заметим что $\max m \le \frac{m}{2}$ (т.к 2 - min возможный делитель) и $\max n \le \frac{n}{2}$

$\min n + \max m \le \min n + \frac{m}{2}$

⇓

$\min n + \frac{m}{2} \ge n$ Аналогично $\min m + \frac{n}{2} \ge m$

↓ сложим неравенства

$m + n \le \frac{n}{2} + \frac{m}{2} + \min m + \min n$

$\frac{m}{2} + \frac{n}{2} \le \min n + \min m$

Заметим, что это неравенство неверное, т.к

$\frac{n}{2} \ge \min n$ и $\frac{m}{2} \ge \min m$ во всех случаях кроме следующих

$n = m = 2^2$ — невозможно т.к. числа различны

n или m — простое, тогда $\min k = k$, ~~а~~ k — прост.ч тогда по решению I невозможно

К числу прибавляют что-то 70 и получают данное число

Таких пар чисел НЕТ!!!

№5.

$a+b+c=1$ $\quad a, b, c > 0$ т.к. они положительные.

БОО:

$a \geq b \geq c$

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$$

Пусть $a=b+z$ $\quad z$-отклонение от b $\quad (z \geq 0)$

$$c = 1-a-b = 1-b-z-b =$$
$$= 1-2b-z$$

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{(1+b+z)(b+1)(2-2b-z)}{b(b+z)(1-2b-z)+1} = \frac{(b^2+2b+z+bz+1)(2-2b-z)}{b(b-2b^2-bz+z-2bz-z^2)+1} =$$

$$b-2b^2-3bz+z-z^2$$

$$= \cancel{2b^2} - 2b^3 - \cancel{2b^2} + \cancel{4b} - \cancel{4b^2} - \cancel{2bz} + 2z - \cancel{2bz} - \cancel{z^2} + \cancel{2bz} - 2b^2z - \cancel{z^2}$$

$$= \frac{\cancel{2b^2}+\cancel{4b}+\cancel{2z}+\cancel{2bz}+\cancel{2} - 2b^3 - \cancel{4b^2} - 2bz - 2b^2z - 2b - b^2z - \cancel{2bz} - \cancel{z^2} - bz^2 - \cancel{z}}{b^2 - 2b^3 - 3b^2z + bz - bz^2 + 1} =$$

$$= \frac{-b^3 - 2b^2 + 2b - z^2 - z - 2bz + 2 - 3b^2z - bz^2}{-2b^3 + b^2 - 3b^2z + bz - bz^2 + 1} =$$

$$= \frac{-2b^3 + b^2 - 3b^2z + bz - bz^2 + 1 + b^3 - 3b^2 + 2b - z^2 - z - 3bz + 1}{-2b^3 + b^2 - 3b^2z + bz - bz^2 + 1} =$$

$$1 + \frac{b^3 - 3b^2 + 2b - z^2 - z - 3bz + 1}{-2b^3 + b^2 - 3b^2z + bz - bz^2 + 1} = \max$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-2b^3 + b^2 - 3b^2z + bz - bz^2 + 1}{b^3 - 3b^2 + 2b - z^2 - z - 3bz + 1} = \min$$

заметим что в знаменателе z со знаком "$-$" и в числителе тоже. $\Downarrow$ чем меньше z, тем меньше число

$z = 0$

$a=b=c=\frac{1}{3}$ не обосновано $\Longleftarrow$

Значение выражения:
$$\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{\frac{28}{27}} = \frac{64}{27} \cdot \frac{27}{28} = \frac{16}{7}$$

Бланк ответов