ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502820335314

# Титульный лист

**Направление** ☐ информатика ☐ история ☒ математика
☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык
☐ социология ☐ физика ☐ химия
☐ филология

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

**Фамилия** ОСИНКИНА

**Имя** АНАСТАСИЯ

**Отчество** ВИКТОРОВНА

**Дата рождения** 10 01 2006

**Город участия** НОВЫЙ УРЕНГОЙ

**Аудитория** 22

**Телефон** +79320542120

**Дата** 26 02 2022 **Подпись** Анаст

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

**ИЗУМРУД**
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2502820335314

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ политология ☐ русский язык ☐ социология ☐ физика ☐ химия ☐ филология

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10 ☐ 11

## Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Время выхода с : до :

Примечание

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 00 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 03 | 0 | 0 | ~~3~~ | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 13 | 00 | 00 | 00 | | | | | |

| Номер задания | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | | | | | | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | | | | | | | | | | |

**Итоговый балл** 028

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

## Задание 1

$\overline{abc}$ - искомое трёхзначное число

$a\neq0$ - противор. условию

$a<b<c$, $a\neq b\neq c$

(I) Рассмотрим число 100 - наименьшее трёхзначное

100 - 3 цифры

$(100)^2 = 10000$ - 5 цифр

$(100)^3 = 1000000$ - 7 цифр

Значит, число $\overline{abc}$ ~~имеет~~ состоит из: не менее чем 5 цифр при возведении в квадрат, и не менее чем 7 цифр при возведении в куб.

Тогда последняя цифра числа $\overline{abc}$ принимает следующие значения:

При $\overline{abc}$ : $c=\{3;4;5;6;7;8;9\}$ - т.к. $a<b<c$, $a\neq0$, $a\neq b\neq c$

При $(\overline{abc})^2$ : $c=\{5;6;7;8;9\}$ - т.к. цифры разл. и расп. в возраст. порядке

При $(\overline{abc})^3$ : $c=\{7;8;9\}$ - те же условия

(II) Рассмотрим последнюю цифру числа $\overline{abc}$ при возв. в квадрат, куб:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | подходит | | | | | | искл. |
| $\overline{abc}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $(\overline{abc})^2$ | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| $(\overline{abc})^3$ | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |
| | | искл. | искл. | искл. | искл. | искл. | |

Учитывая сделанные ранее выводы, исключим не подходящие условию варианты:

Рассмотрим число 123 (ед., удовл. услов. при $c=3$)

123 ✓ + $(123)^2 = 15\underline{\underline{129}}$ — не подходит по условию

Значит, таких трёхзначных чисел не существует.

и.т.д.

## Задача 2

$\overline{abcdedcba}$ — девятизначный палиндром

(I) "Разобьём" палиндром на четырёхзначн. число $\overline{abcd}$, константу e и четырёхзн. $\overline{dcba}$. Заметим, что число сохраняет свойства палиндрома при любом e.

Найдём количество четырёхзначных чисел $\overline{abcd}$:

$\overline{a\,b\,c\,d}$

9 $\underbrace{10\ \ 10\ \ 10}$

т.к. могут принимать знач. 0

$\boxed{9\cdot10^3}$ — четырёхзначн. чисел

(II) Найдём количество палиндромов 9-значн.:

$$\underbrace{9\cdot10^3}_{\text{четырёхзн. } \overline{abcd}\text{, } \overline{dcba}\text{-наоборот}} \cdot \underset{\text{кол-во значений цифры e (от 0 до 9)}}{10} = 9\cdot10^4$$

$\overset{-}{+}$

(III) Найдём кол-во изменений в палиндроме, чтобы оно стало почти палиндромом:

$\overline{abcdedcba}$

8 9 9 9 9 9 9 9

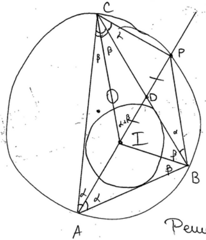
Т.е. $8+9\cdot7 = 8+63 = 71$ изменение

Тогда количество почти палиндромов равно

$9\cdot10^4\cdot71$

Ответ: $9\cdot10^4\cdot71$

## Задание 3



Дано: $\triangle ABC$, AD - бис., I - инцентр, ID = DP, O - ~~вписан. центр.~~ центр. описан. окр.

Найти: $\frac{AI}{ID}$

Решение:

I. AD - бис. ⇒ AD проходит через инцентр I (т.к. I - центр. впис. окр, центр впис. окр. лежит на пересеч. бис.)

II. Проведём CP и BP. $\angle PAB = \angle PCB$, $\angle CAP = \angle CBP$ ⇒ $\triangle CPB$ равноб (по св-ву равноб. $\triangle$) ✓

III. Проведём CI - бис. Тогда $\angle CID = \alpha+\beta$ (внешн. угол) ⇒ $\triangle CPI$ равноб. (CP = PI)
CP = PI = PB - равноб. $\triangle$. ✓

IV. Проведём BI - бис. $\angle PBI = \angle PIB$ - у равноб. $\triangle$, значит $\angle \underline{DBI} \overset{?}{=} \beta$. Значит $\angle IBA = \beta$ - как бис. BI ⇒ $\angle C = \angle B$ ⇒ $\underline{\triangle ABC \text{ равноб.}}$ Тогда $\angle CDA = 90°$ - AI-бис. равноб. $\triangle$, по св-ву равноб $\triangle$. ID - радиус.

V. Тогда I - точка пере. медиан равноб $\triangle ABC$ (по св-ву бис-мед-выс.)

VI. Тогда AI : ID = 2:1 - по св-ву медиан

Ответ: 2:1

## Задача 4

$m = q_1 q_2$, где $q_1$ - наим. дел, $q_2$ - наиб

$n = p_1 p_2$, где $p_1$ - наим. дел., $p_2$ - наиб

$m = p_1 + p_2$

$n = q_1 + q_2$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = q_1 q_2 \\ q_1 + q_2 = p_1 p_2 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = q_1 q_2 + p_1 p_2$$

15 и 12 - родственные числа

$3+5 = 2+6$

21 и 25 - родств. числа

$3+7 = 5+5$

$\boxed{-}$

## Задание 5

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$$

$a+b+c = \underline{1}$

$a, b, c > 0$

Воспользуемся неравенством о средних, так как $a,b,c>0$:

$$\frac{n}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{a + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}{2}}$$

$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ - неравво между ср. арифм. и геом. (по Коши)

$\frac{1}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \geqslant \sqrt[3]{abc}$ - т.к числа положительн.

$\frac{1}{9} \geqslant abc$ — наиб. достиг. при равве (по Коши)

$$\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$\left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 \geqslant (a+1)(b+1)(c+1)$ — Так как положительн.

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \geqslant (a+1)(b+1)(c+1)$$

$\frac{64}{27} \geqslant (a+1)(b+1)(c+1)$ — наиб. достиг. при равенстве (по Коши)

— .

Тогда : $\dfrac{\frac{64}{27}}{\frac{1}{\textcircled{9}_{27}}+1} = \frac{64}{27} : \frac{10}{9} = \dfrac{\overset{32}{\cancel{64}} \times \cancel{9}}{\underset{3}{\cancel{27}} \times \underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$

Ответ : $2\frac{2}{15}$

$\ominus$