ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802465404364

Титульный лист

Направление	☐ информатика	☐ история	☑ математика
	☐ обществознание	☐ русский язык	☐ физика
	☐ химия		

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Фамилия АДРОХИН

Имя ИВАН

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 03 02 2005

Город участия ТЮМЕНЬ

Аудитория 317

Телефон 89097424678

Дата 07 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802465404364

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☑ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☑ 11

Город участия ТЮМЕНЬ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	7	–	0	15	0					
Балл члена жюри №2	7	–	0	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 22

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Задание 1

$a_1+a_2+...+a_n=2021$

Очевидно, из одного слагаемого выражение составить не может, так как 2021 - не палиндром ✓

Предположение, пример можно построить из двух слагаемых, переберем все палиндромы:

Заметим, что перебрав все двузначные палиндромы, мы не сможем составить пример, т.к. число вида $\overline{aa}+a_2=2021$ (a_2 - не палиндром)

Пусть, $a_1=\overline{abc}$, т.к. оно палиндром, => $\overline{abc}=\overline{cba}$ => $100a+10b+c=100c+10b+a$, => $99a=99c$ => $\boxed{a=c}$

$a_2=2021-a_1$, ~~=> $a_2=\overline{defg}$ = 1000d+100e+10f+g, т.к. оно палиндром =>~~

~~$a_2=\overline{defg}=\overline{gfed}$ => 1000d+100e+10f+g = 1000g+100f+10e+d =>~~

~~=> 999d + 90e = 999g + 90f ⋮ 9~~

$a_1=\overline{aba}$

~~11d+10e = 11g+10f (условие для палиндрома четырехзначного числа)~~

Немного подумав, осознаем, что ~~это~~ $(2021-\overline{aba}) \equiv (11-\bar{a})$ ~~=>~~ но так тогда

почему?

$a_2=\overline{1efg}$ => g=1, ~~то~~ => равенство возможно, только если $\bar{a}=0$, что невозможно, т.к. число тогда не будет трехзначным (наоборот: $a_1+a_2=2021$; $\overline{aba}+a_2=2021$) т.к. a_1 - трехзн. число, то a_2 - четырехзн. число

Доп. случай, когда число четырехзн., 1001+1020=2021, 1020 - не является палиндромом =>

=> мы получим противоречие, и с помощью двух слагаемых палиндромов составить пример 2021 не получится. Случай трёхзначных чисел не рассмотрен

Пример на 3 слагаемых очевиден:

888+22+1111=2021 пример

Ответ: min-кол слагаем = 3

7

Задание 4.

ОДЗ: $\begin{cases} k \geq 0 \\ n+\sqrt{k} \geq 0 \end{cases}$

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$

$\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023 - m$

Т.к. $2023 - m \geq 0$

$n + \sqrt{k} = (2023-m)^2$

$\cancel{\sqrt{k} = n+\sqrt{k} = 2023^2 - 2\cdot 2023m + m^2}$

Очевидно, $m \neq 2023$, т.к. тогда $\sqrt{n+\sqrt{k}} = 0$ ур. е не будет иметь решений, т.к. $n, k \in N$

Также очевидно, $m < 2023$, иначе $\sqrt{n+\sqrt{k}} < 0$

Также очевидно $m \neq 2022$, иначе $\sqrt{n+\sqrt{k}} = 1$ не будет иметь решений в натур. числах

Итого: $\begin{cases} m < 2022 \\ m \geq 1 \end{cases}$

Начнем перебор m, для выявления закономерностей:

$m=2021$, тогда $n+\sqrt{k} = 4$; $n=1, k=9$; $n=2, k=4$; $n=3, k=1$. Итого имеем 3 реш.

Решения буду записывать в виде (m, n, k)

3 реш.: $(2021; 1; 9)$, $(2021; 2; 4)$; $(2021; 3; 1)$

$m=2020$, тогда $n+\sqrt{k} = 9$

$(n=1, k=64)$; $(n=2, k=49)$;
$(n=3, k=36)$; $(n=4, k=25)$;
$(n=5, k=16)$; $(n=6, k=9)$;
$(n=7, k=4)$; $(n=8, k=1)$

Заметим, что для каждого $n \in [1; (2023-m)^2)$ соответ ровно одно значение „k"

$m \in [1; 2022)$ ✓

То есть получаем, что нужно посчитать сумму длины отрезка $[1; (2023-m)^2)$

для каждого $m \in [1; 2022)$

Итого: $\sum_{m=1}^{m=2021} \left((2023-m)^2 - 1\right)$

Т.к. ответ не просят записать в замкнутом виде, можно оставить его таким

Ответ: $\sum_{m=1}^{m=2021} \left((2023-m)^2 - 1\right)$

$\pm$

Задание 3

$a, b, c, d > 0$

$a^2+y=b^2,\ a^2+2y=c^2,\ a^2+3y=d^2$

$\frac{1}{a+b+c}+z=\frac{1}{a+b+d},\ \frac{1}{a+b+c}+2z=\frac{1}{a+c+d},\ \frac{1}{a+b+c}+3z=\frac{1}{b+c+d}$

$a^2=b^2-y=c^2-2y=d^2-3y$

$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+b+d}-z,\ \frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+c+d}-2z,\ \frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{b+c+d}-3z$

$b^2-y=c^2-2y=d^2-3y$

$\cancel{b^2-c^2-d^2=0}\quad b^2-d^2=-2y$

$\begin{cases} b^2-c^2=-y \\ c^2-d^2=-y \end{cases} \Rightarrow b^2-c^2=c^2-d^2 \Rightarrow b^2+d^2=2c^2 \quad \cancel{(b-c)(b+c)=(c-d)(c+d)}$

$\boxed{b^2+d^2=2c^2}$

$\frac{1}{a+b+d}-z=\frac{1}{a+c+d}-2z=\frac{1}{b+c+d}-3z$

$\begin{cases} \frac{1}{a+b+d}-\frac{1}{a+c+d}=-z \\ \frac{1}{a+c+d}-\frac{1}{b+c+d}=-z \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a+b+d}-\frac{1}{a+c+d}=\frac{1}{a+c+d}-\frac{1}{b+c+d} \Rightarrow \frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}=\frac{2}{a+c+d}$

А если нет?

Очевидно если $a=b=c=d$, то равенство выполняется.

$\begin{cases} a^2+a^2=2a^2 \\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{3a}=\frac{2}{3a} \end{cases}$ — тождества

Также ~~очевидно~~ неочевидно, если условие $a=b=c=d$ не выполняется, то равенство обоих уравнений системы невозможно.

Итого:

$\begin{cases} b^2+d^2=2c^2 \\ \frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{b+c+d}=\frac{2}{a+c+d} \end{cases}$

Ответ: Доказано!

Задание 5.

Дана таблица 8 на 8.

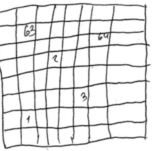

Таблица произвольно заполнена целыми числами от 1 до 64.

$\boxed{\text{Важное уточнение}}$! - в условии не сказано видит ли Вася числа на доске, буду считать, что да, так в условии умалчивается.

Очевидно, Вася поставит свою ладью на клетку с числом 64, с целью максимизировать сумму.

Дальше с целью максимизации суммы ему нужно попасть в клетку с числом 63, если это возможно одним ходом, то можно сразу попасть, сделав сумму 64+63 и дальше, так как мы не знаем расстановки чисел, гарантированно может попасть в любую клетку с суммой больше или равной единицы. Итого: $64+63\cancel{+1}=128$

Если же нельзя попасть в клетку с ~~номером~~ числом 63 (после числа 64) то идем (строим маршрут) к клетке с 63, то есть [illegible] ведем ладью в одну из двух клеток откуда можно попасть к числу 63.

Гарантированно по пути соберем число $\geq 1 \Rightarrow \max_{\text{гарант.}} = 64+1+63 = 128$

Ответ: 128

Можно больше

Бланк ответов