ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802692354466

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ЗИТУНА

Имя ЯСМИН

Отчество

Дата рождения 02 02 2005

Город участия КАЛИНИНГРАД

Аудитория КЛУБ

Телефон 79253245260

Дата 27 02 2023 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2802692354466

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия КАЛИНИНГРАД

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	15	0					
Балл члена жюри №2	20	20	10	15	0					

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 70

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

1) Докажем, что слагаемых не может быть меньше 3х штук.

Пусть их было 2. Макс. сумма 2х трехзначных чисел равна $999 + 999 = 1998 < 2021 \Rightarrow$ не подходит. Предположим, одно из слагаемых — четырехзначное и равно $\overline{x_1x_2x_2x_1}$, а второе слагаемое равно y. Ясно, что $x_1 \le 2$. Если $x_1 = 2$, то единственное возможное знач. 1ого слагаемого равно $2002 \Rightarrow y = 19$ — не палиндром. Значит, $x_1 = 1$. Тогда $\overline{x_1x_2x_2x_1} \equiv 1 \pmod{10}$ и $2021 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow y \vdots 10$ — невозможно, т.к. палиндром не может оканчиваться на 0.

Получаем, слагаемых должно быть минимум 3 шт.

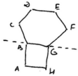
2) Пример: $999 + 989 + 33 = 2021$

Ответ: 3 задачи

№2

Ответ: да, существует

Пример:



Многоугольник ABCDEFGH, где ABGH - квадрат, а BCDEFG — правильный шестиугольник. Сам многоуг. не имеет центра симметрии, но разрезав его по прямой BG получим 2 выпуклых многоуг., имеющих центры симметрии.

№3

Из условия следует, что $\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a+b+d} = \frac{1}{a+b+d} - \frac{1}{a+c+d} = \frac{1}{a+c+d} - \frac{1}{b+c+d}$

1) $\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a+b+d} = \frac{1}{a+b+d} - \frac{1}{a+c+d}$

$$\frac{a+b+d-a-b-c}{(a+b+c)(a+b+d)} = \frac{a+c+d-a-b-d}{(a+b+d)(a+c+d)}$$

$$\frac{d-c}{a+b+c} = \frac{c-b}{a+c+d} \quad ; \ a, b, c, d > 0$$

$$ad + cd + d^2 - ac - c^2 - cd = ac - ab + bc - b^2 - bc + c^2 - bc$$

$$a(d-c) + d^2 - c^2 = a(c-b) + c^2 - b^2$$

Из условия следует, что $b^2 - a^2 = c^2 - b^2 = d^2 - c^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a(d-c) = a(c-b)$$

$$d - c = c - b \ \checkmark$$

2) $$\frac{1}{a+b+d} - \frac{1}{a+c+d} = \frac{1}{a+c+d} - \frac{1}{b+c+d}$$

$$\frac{a+c+d-a-b-d}{(a+b+d)(a+c+d)} = \frac{b+c+d-a-c-d}{(b+c+d)(a+c+d)}$$

$$\frac{c-b}{a+b+d} = \frac{b-a}{b+c+d} \quad ; \ a, b, c, d > 0$$

$\cancel{bc - c^2 + cd - ab - ac + ad = ab - a^2 + b^2 - ab + bd - ad}$

~~Аналогично получаем:~~

$$bc + c^2 + cd - b^2 - bc - bd = ab - a^2 + b^2 - ab + bd - ad$$

$$c^2 - b^2 + d(c-b) = d(b-a) + b^2 - a^2$$

Аналогично, получаем: $c - b = b - a$ ✓

3) $\begin{cases} d - c = c - b & (\text{из пункта } (1)) \\ c - b = b - a & (\text{из пункта } (2)) \\ b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \end{cases}$

$$(b-a)(a+b) = (c-b)(b+c)$$

Если $b - a \neq 0$

$b - a = c - b \Rightarrow a + b = b + c \Rightarrow a = c$ ✓

$$c^2 - b^2 = b^2 - a^2$$

$$2c^2 = 2b^2$$

$b = c$ ✓

$$d^2 - c^2 = c^2 - b^2$$

$$(d-c)(c+d) = (c-b)(b+c)$$

$$c + d = b + c$$

$b = d$ ✓

Получаем, $a = b = c = d$, ч.т.д.

+

$\boxed{№4}$

$m + \sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023$

$\sqrt{n+\sqrt{k}} = 2023 - m \Rightarrow m \in [1; 2021]$, т.к. $\sqrt{n+\sqrt{k}} \geq 2$

$n + \sqrt{k} = (2023-m)^2$

$\sqrt{k} = (2023-m)^2 - n$

Посмотрим, сколько существует возможных знач. n при каждом значении m

Если $m=1$, то $(2023-m)^2 = 2022^2 \Rightarrow n \in [1; 2022^2-1]$

$m=2$; $(2023-m)^2 = 2021^2 \Rightarrow n \in [1; 2021^2-1]$

$m=3 \Rightarrow n \in [1; 2020^2-1]$

$m=4 \Rightarrow n \in [1; 2019^2-1]$

$\vdots$

$m=2020 \Rightarrow n \in [1; 3^2-1]$

$m=2021 \Rightarrow n \in [1; 2^2-1]$

Значит, всего возможных вариантов:

$2022^2 - 1 + 2021^2 - 1 + 2020^2 - 1 + \ldots + 5^2 - 1 + 4^2 - 1 + 3^2 - 1 + 2^2 - 1 =$

$= 2^2 + 3^2 + \ldots + 2021^2 + 2022^2 - 2021$

Ответ: $2^2 + 3^2 + \ldots + 2021^2 + 2022^2 - 2021$ решений

сумма не досчитана $\mp$

$\boxed{№5}$

Поймем, что за 2 хода ладьей мы можем попасть в любую клетку доски, куда бы ни встали изначально. Значит, Вася всегда сможет попасть и в клетку 64, и в клетку 63, изначально встав в клетку 64, сделав ход в новую клетку, и ~~[illegible]~~ затем добраться до 63. Кроме того, из данной клетки до любой другой клетки можно добраться 2мя способами, а значит в промежуточной клетке Вася сможет увеличить сумму минимум на 2. Итак, получаем, ~~Вас~~ Вася всегда сможет получить сумму равную $63+64+2 = 129$.

Приведем пример доски, где нельзя набрать больше суммы 129.

39	38	37	54	58	1	60	63
40	36	35	34	33	3	61	62
13	11	9	7	5	64	4	2
41	32	31	30	59	6	29	56
42	28	27	57	26	8	25	52
43	24	55	23	22	10	21	20
44	53	19	18	17	12	16	15
51	50	49	48	47	14	46	45

В такой доске на любых двух взятых строке и столбце можно нельзя найти 3 числа, сумма которых >129.

При этом Вася может получить 129, встав на клетку 64, сходив на клетку 2 и 3 степ на клетку 63.

Ответ: 129 оценка не верна

Бланк ответов