ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101714891041

Титульный лист

Направление ☒ информатика ☐ история ☐ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☒ 9 ☐ 10 ☐ 11

Фамилия РОЖКОВА

Имя ПОЛИНА

Отчество МАКСИМОВНА

Дата рождения 12 05 2008

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория И-405

Телефон +79024093701

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101714891041

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [x] информатика
- [ ] история
- [ ] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс
- [ ] 8
- [x] 9
- [ ] 10
- [ ] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	05	00	19						
Балл члена жюри №2	25	05	00	19						

Итоговый балл 049

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 4.

$ab = x$, значит, все делители числа x мы должны распределить между a и b.

НОД$(a, b) = 1$, значит, a и b – взаимно простые, в них нет повторяющихся простых делителей ~~одинаковы~~

(повторяющихся – те, которые есть и в a, и в b)

1) ~~Делите~~ Число 101 делится только на 1 и 101. Из двух чисел мы можем получить только 1 пару, значит, красота числа 101 равна 1. ~~+~~ 4 0

2) Т.к. в a и b не может быть одинаковых простых делителей между собой, все ~~(повторяю)~~ простые делители в максимальной степени будут находиться в одном числе (например, число $12 = 2^2 \cdot 3$. Если разделить двойки между a и b, то эти числа не будут взаимно простыми).

Тогда нам выгодно составить число из наибольшего возможного кол-ва простых делителей в первой степени.

Начнём с наименьшего, т.к. так мы сможем получить наименьш. число ~~из~~ с наибольш. кол-вом делителей, если брать большие, то их будет меньше.

$2 \cdot 3 = 6$ пока подходит, $6 < 1024$

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ не подходит, ~~10~~ $2310 > 1024$

± 15

Значит, максимальная красота будет у числа 210. У него 4 ~~дели~~ простых делителя. Их можно сгруппировать по парам так:

1) $(1; 2\cdot3\cdot5\cdot7)$
2) $(2; 3\cdot5\cdot7)$
3) $(3; 2\cdot5\cdot7)$
4) $(5; 2\cdot3\cdot7)$
5) $(7; 2\cdot3\cdot5)$
6) $(2\cdot3; 5\cdot7)$
7) $(2\cdot5; 3\cdot7)$
8) $(2\cdot7; 3\cdot5)$

Итого 8 пар.

Ответ: Красота числа 210 максимальна и равна 8.

Задание 1.

Рассмотрим небольшой участок таблицы:

a_1	a_2	a_5	a_6	a_{17}
a_3	a_4	a_7	a_8	a_{18}
a_9	a_{10}	a_{13}	a_{14}	a_{19}
a_{11}	a_{12}	a_{15}	a_{16}	a_{20}

$a_1+a_2+a_3+a_4=64$ кв.1

$a_5+a_6+a_7+a_8=64$ кв.2

$a_2+a_5+a_4+a_7=64$ кв.3

кв.1 + кв.2 − кв.3 $= a_1+a_3+a_6+a_8=64$

кв.1 = кв.3 $\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=a_2+a_5+a_4+a_7$

$$a_1+a_3=a_5+a_7$$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=64$ кв.4

$a_3+a_4+a_9+a_{10}=64$ кв.5

кв.1 = кв.5 $\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_9+a_{10}$

$$a_1+a_2=a_9+a_{10}$$

Это же самое можно сделать и с остальными квадратами.

$$\left.\begin{aligned} a_1+a_3&=a_5+a_7 \\ a_3+a_9&=a_7+a_{13}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1-a_9&=a_5-a_{13} \\ a_1+a_{13}&=a_5+a_9\end{aligned}$$

Получается, что если разделить таблицу на строки шириной 2 клетки, то суммы будут чередоваться через 1. Это же самое со столбцами.

~~Допустим, что в пересекающихся строках эти суммы различны:~~

~~$a_1+a_3 \neq a_3+a_9 \Rightarrow a_1 \neq a_9$~~

~~Тогда $a_3 \neq a_{11}$, $a_2 \neq a_{10}$, $a_2 \neq a_{12}$~~

~~Но $a_1+a_3 = a_9+a_{11}$~~

$a_1+a_3 = a_3+a_9$

$a_1 = a_9$ И так для остальных.

В итоге получаем 4 различных числа на всю таблицу, которые в сумме дают 64.

512

2048	a_1	a_2	a_1	a_2
	a_3	a_4	a_3	a_4
	a_1	a_2	a_1	a_2
	a_3	a_4	a_3	a_4

Если смотреть по периметру, то мы получим: $(a_1+a_3)\cdot\frac{2048}{2} + (a_2+a_4)\cdot\frac{2048}{2} + (a_1+a_2)\cdot\frac{512}{2} + (a_3+a_4)\cdot\frac{512}{2} - (a_1+a_2+a_3+a_4) = (a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot 1024 + (a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot 256 - (a_1+a_2+a_3+a_4) = 64\cdot 1024 + 64\cdot 256 - 64 =$

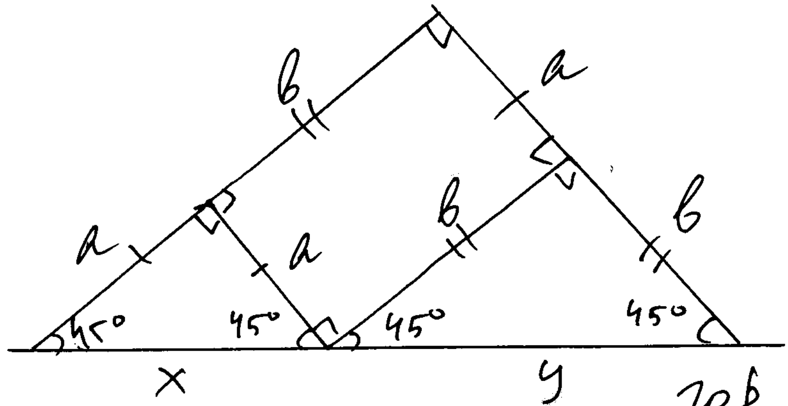
$= 2^6\cdot 2^{10} + 2^6\cdot 2^8 - 2^6 = 2^{16} + 2^{14} - 2^6$

+ 25б

Ответ: $2^{16} + 2^{14} - 2^6$

Задание 2.

Обе горы нарисуем рядом, не меняя при этом размеры углов:



Т. к. углы обеих ~~граней~~ гор при основании равны 45°, угол между их сторонами равен $180° - 45° - 45° = 90°$

Смежные углы с вершинами, противолежащими основаниям, равны $180° - (180° - 45° - 45°) =$

$= 180° - 180° + 90° = 90°$

В итоге, достроив боковые линии гор, получим прямоугольник, со сторонами, равными сторонам треугольников.

Площадь гор на рисунке равна:

$\frac{(a+b)^2}{2} - ab$. ~~Если~~

1) Если считать поверхностью гор только боковые стороны (не лежащие на земле), то общая протяжённость поверхности гор равна $2a + 2b = 2(a+b) = 4096$

$a + b = 2048$.

Получаем, что $a+b$ не изменяется, а значит, $\frac{(a+b)^2}{2} = const$.

Тогда для того, чтобы минимизировать итоговую площадь, нужно максимизировать вычитаемое ab. Как известно, ab макс, когда $a=b$.

$a+b=2048$ $\quad a+a=2048 \quad 2a=2048 \quad a=1024$

Получается, что в этом случае мин. площадь гор равна: $\frac{(a+b)^2}{2}-ab=\frac{(2a)^2}{2}-a^2=$

$=\frac{4a^2}{2}-a^2=2a^2-a^2=a^2=1024^2=(2^{10})^2=2^{20}$

2) Если считать сторону горы, лежащую на земле, как часть поверхности:

По теореме Пифагора:

$x=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$

$y=\sqrt{b^2+b^2}=\sqrt{2b^2}=b\sqrt{2}$

Общая протяжённость поверхности гор равна

$2a+a\sqrt{2}+2b+b\sqrt{2}=a(2+\sqrt{2})+b(2+\sqrt{2})=$

$=(2+\sqrt{2})(a+b)=4096$

$a+b=\frac{4096}{2+\sqrt{2}}$ Получаем, что $a+b$ не изменяется, тогда $\frac{(a+b)^2}{2}=const$.

Тогда для того, чтобы минимизировать итоговую площадь, необходимо максимизировать вычитаемое ab. Как известно, ab макс., когда $a=b$.

$2a=\frac{4096}{2+\sqrt{2}} \quad a=\frac{\cancel{409}\ 2048}{2+\sqrt{2}}$

В этом случае мин. площадь гор равна:

$$\frac{(a+b)^2}{2} - ab = \cancel{\frac{\left(\frac{4096}{2+\sqrt{2}}\right)^2}{2}} - \cancel{\left(\frac{2048}{2+2\sqrt{2}}\right)^2} \frac{(2a)^2}{2} - a^2 =$$

$$= \frac{4a^2}{2} - a^2 = 2a^2 - a^2 = a^2 = \left(\frac{2048}{2+\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2048^2}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{(2^{11})^2}{2^2 + 4\sqrt{2} + 2} = \frac{2^{22}}{6+4\sqrt{2}} = \frac{2^{22}}{2(3+2\sqrt{2})} = \frac{2^{21}}{3+2\sqrt{2}}$$