ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302055262935

Титульный лист

Направление ☐ информатика ☐ история ☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия ГОЛОВАНОВ

Имя КИРИЛЛ

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 18 11 2006

Город участия Омск

Аудитория 21

Телефон

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1302055262935

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- ☐ информатика
- ☐ история
- ■ математика
- ☐ обществознание
- ☐ русский язык
- ☐ физика
- ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

Город участия Омск

Заполняется организаторами

Количество доп. листов 00 Количество черновиков к проверке 00

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	0	5	–					
Балл члена жюри №2	20	0	0	5	–					

Итоговый балл 25

Подпись члена жюри №1 [signature] **Подпись члена жюри №2** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

№1

Пусть полученная последовательность 12 чисел равна: $n, (n+1), (n+2), \ldots, (n+11)$

n - начальное число полученной последовательности; т.к. каждый член последовательности отличается от предыдущего на 1 => сумма будет равна: $\frac{n+11+n}{2} \cdot 12 = (2n+11) 6 = 12n + 66$

~~Также эта сумма равна сумме чисел от 1 до 36 = $\frac{36+1}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 18 = 666$~~

~~=> $12n+66 = 666$ => $12n = 600$ => $n = 50$ - первое число последов.~~

~~=> Последовательность: 50, 51, 52 ... 61~~

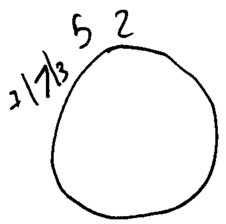
Рассмотрим происходящее в квадрате при постановке одного числа: это число одновременно находится как в горизонтали, так и в вертикали. => каждое считается 2 раза => сумма полученной последовательности будет равна Σ от 1 до 36, умноженной на 2 => $\Sigma = \frac{36+1}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 18 = 666$

=> $666 \cdot 2 = 1332 = 12n + 66$

=> $12n = 1266$ => $n = \frac{1266}{12}$, но тогда получаем, что $n \notin \mathbb{N}$, а по условию все числа являются натуральными => НЕЛЬЗЯ так расставить числа

Ответ: нельзя

№ 3



т.к. число 5 делится только на 5 и на 1, а один из соседей – 2 => ~~слева от~~ сбоку 5 стоит либо 7, либо 1, либо 3
(7-2=5; 2-1=1; 3-2=1)

Докажем, что 6 и 4 стоят рядом от противного => пусть они не соседи => у 4 делители: 4, 2, 1.

делитель=4 можно получить: 7-3, 5-1, 6-2

=> 1. соседи 7 и 3: ~~74325~~ повезло? 74352 6 (2 кратно 2 и 1, 5-3, 7-5, 5-4, 6-5), остаётся 1, но тогда 7 не сможет делиться на 6-1=5) ещё случай 7431...
2. 5-1, но у 5 не может быть сосед 4 => ⊖
3. 6-2 (6 не сосед) => ⊖
743 58 ⊖ (по условию 5 и 2 рядом) => ⊖

делитель=2 можно получить: 8-6, 7-5, ~~4-2~~, 3-1
1. 8-6 (6 не сосед) => ⊖
2. 7-5 (у 5 не может быть сосед 4) => ⊖
3. 3-1 => 341527.. => (у 7 делитель 8-1=7 и 1 => придётся либо 3, либо 1 использовать второй раз) => ⊖
34152687 (остаётся справа поставить 7, но 7 ∤ 8-3) => ⊖
⊖

делитель=1 можно получить: 8-7, 7-6, 6-5, ~~5-4~~, 3-2, 2-1
1. 8-7 => 84736251 (но 8 ∤ 4-1) => ⊖
84736 52 (6 не может быть соседом у 5) => ⊖
2. 7-6 (6 не сосед) => ⊖
3. (6-5) (6 не сосед) => ⊖
4. 3-2 => 34257_ (7 : 7 и 1 => 5-4, но 4 уже использ.) => ⊖
3425167_ (остаётся поставить 8, но 7 ∤ 8-6=2) => ⊖
5. 2-1 => 52413 (3 : 3 и 1, ~~но~~ 2-1 и 4-1, но 2 и 4 заняты => ⊖)

Таким образом, если 4 и 6 не стоят рядом, то невозможно составить последовательность с необходимым условием => (противоречие) 4 и 6 должны стоять рядом.
Что и требовалось доказать.

Пример последовательности: 52738461..

~~?~~ перебор неполный —

Бланк ответов

№4

Проблема, которая возникает при постановке фигур: может ~~не~~ остаться пустое место м/у O и X, а подходящим образом не поставить.

Для решения этой проблемы будем заполнять поле, начиная с боковых углов. Все фигуры ставятся симметрично на доске, относительно центральной оси симметрии (чтобы заполнялись пустые клетки, стоящие рядом с фигурами), также по этой причине фигуры будут стоять по парам.

Из-за того, что мы ставим эти пары симметрично, то необходимо (и достаточно), чтобы эти ~~пары~~ на одной вертикали (горизонтали) находилась всего одна пара, иначе останутся пустые клетки, которые не получится заполнить из-за отсутствия места.

Таким образом, можно разбить доску на 8 вертикалей (горизонталей), в каждой по 2 фигуры $\Rightarrow$ минимальное достаточное кол-во фигур-"оборотней" $= 2\cdot 8 = \underline{16}$
(если же будет меньше пар, то при такой расстановке какие-то линии останутся неполностью заполненными)

Пример расстановки

ось симметрии

X	X	O	X	X	O	X	X
X	X	O	X	X	O	X	X
X	O	X	X	X	X	O	X
X	O	X	X	X	X	O	X
O	X	X	X	X	X	X	O
O	X	X	X	X	X	X	O
X	X	X	O	O	X	X	X
X	X	X	O	O	X	X	X

Ответ: 16 фигур

рассмотрен только частный случай расстановки

I

№2

$a, b, c \leq 1$

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$a^2+b^2+c^2=1-2abc \Rightarrow abc=\frac{1-a^2-b^2-c^2}{2} \Rightarrow \sqrt{abc}=\sqrt{\frac{1-a^2-b^2-c^2}{2}} \Rightarrow 2\sqrt{abc}=\sqrt{2-2a^2-2b^2-2c^2}$

$\Rightarrow 4abc=2-2a^2-2b^2-2c^2$

$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}+c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}$

Возведём обе части неравенства в квадрат:

$a^2(1-b^2)(1-c^2)+b^2(1-c^2)(1-a^2)+c^2(1-a^2)(1-b^2)+2ab\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}(1-c^2)+2bc\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}\cdot(1-a^2)+$
$+2ac\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}\cdot(1-b^2) \geq 4abc$ неверный переход

$\Rightarrow a^2-a^2b^2-a^2c^2+a^2b^2c^2+b^2-b^2c^2-a^2b^2+a^2b^2c^2+c^2-c^2b^2-a^2c^2+a^2c^2b^2+\ldots \geq 2-2a^2-2b^2-2c^2$

$3a^2+3b^2+3c^2+3a^2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2+\ldots \geq 2$

$3-6abc+3a^2b^2c^2-(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)+\ldots \geq 2$

$1+3abc(abc-2)-(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)+\ldots \geq 0$

$1+3abc(abc-2)-2ab(ab-(1-c^2)\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)})-2bc(bc-\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}(1-a^2))-$
$-2ac(ac-(1-b^2)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}) \geq 0$

$1+3abc(abc-2)+\sqrt{(1-b)(1-c)(1-a)}(2ab\sqrt{1-c^2}+2bc\sqrt{1-a^2}+2ac\cdot\sqrt{1-b^2})-(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2) \geq 0$

последнее часть выражения $<< 1$ (так как $a, b, c \leq 1$; $a^2, b^2, c^2 << 1$) $\Rightarrow$ от 1 будет отниматься число < 1, добавляться положительное число

$\Rightarrow$ выражение ≥ 0

ч.т.д.

Бланк ответов