ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101119434659

Титульный лист

Направление [ ] информатика [ ] история [x] математика [ ] обществознание [ ] русский язык [ ] физика [ ] химия

Класс [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

Фамилия БУНЬКОВ

Имя МИХАЭЛЬ

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 04 10 2006

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория С III

Телефон +79321125202

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101119434659

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 ☐ 11

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с : до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	0	–	5	20					
Балл члена жюри №2	20	0	–	5	20					

Итоговый балл 45

Подпись члена жюри №1 **Подпись члена жюри №2**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

№1.

Всего дано 36 чисел. ~~Во~~ Предположим, что это возможно. Тогда сумма сумм по вертикали и горизонтали будет равна $\frac{(1+36)}{2}\cdot 36 = 666$, а по вертикали и горизонтали в сумме $666+666=1332$. Попытаемся найти последовательность из 12 чисел, сумма которой равна 1332:

$$105,\ 106,\ 107,\ 108,\ \underbrace{109,\ 110}_{220},\ 111,\ 112,\ 113,\ 114,\ 115,\ 116$$

Её сумма $110 + 220\cdot 5 + 116 = 1326 < 1332$. Логично, что ~~если~~ если мы сдвинем её на 1 вперёд, то ~~она~~ сумма $(1326-105+117)$ и ~~станет сум~~ увеличится на 12 станет $1326+12=1338 > 1332$.

Из этого следует, что нет последовательности из 12 чисел, сумма которой равна 1332, а значит, невозможно расставить числа в квадрат таким образом, чтобы выполнялось условие.

Ответ: нет, нельзя.

+

№2.

Все действительные числа однозначно положительные, так в противном случае правая часть неравенства $a_{2023}^2 \le 2a_1 - 1$ только a всегда отрицательная (в т.ч. при $a_1=0$), а левая всегда положительная (т.к. она в квадрате)

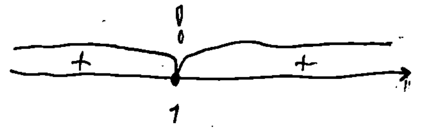
такого условия нет

При условии, что действительные числа записаны в порядке возрастания, a_1 „выгоднее" быть как можно ближе к a_{2023}.

Пусть $a_{2023}=a_1=n$. Тогда

$$n^2 \le 2n-1$$
$$n^2-2n+1 \le 0$$
$$n^2-2n+1=0$$

$D=0$ $n=1$!



Получаем, что даже при $a_{2023}=a_1$ неравенство $a_{2023}^2 \le 2a_1-1$ выполняется только при $a_{2023}=a_1=1$. Из этого следует, что $a_1=a_2=a_3=\ldots$

$\ldots = a_{2023} = a_{2024} = 1$. Следовательно, неравенство $a_j^2 \geq 2a_{j+1} - 1$ выполняется при $\forall a$, а значит, существует такое j, при котором $(j \in [a_1; a_{2023}])$ $a_j^2 \geq 2a_{j+1} - 1$

№5.

Для того, чтобы доказать, что таких чисел бесконечно много, достаточно доказать, что при любом неотрицательном нечётном n для хотя бы одного n-значного числа найдётся хотя бы одно n-значное число, произведение которых даёт $2n-1$-значное число, у которого все цифры нечетные. (т.к $2n$ чётные)

Для $n = 1$ подойдёт, например, пара 1 и 3.

Рассмотрим ~~деление~~ умножение в столбик без переноса десятков:

$$\begin{array}{r} \ldots Н\,Н\,Н\,Н \\ \times\ Н\,Н\,Н\,Н \\ \hline \ldots Н\,Н\,Н\,Н \\ Н\,Н\,Н\,Н\ \ \\ +\ Н\,Н\,Н\,Н\ \ \ \ \\ Н\,Н\,Н\,Н\ \ \ \ \ \ \\ \hline Ч\,Н\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \end{array}$$

получается чётная цифра, а значит, необходим перенос десятков. ~~Попробуем най~~ Допустим, все слагаемые при умножении ~~кроме~~ в каждом ряду будут чётными. Тогда сумма в ряду гарантированно нечётная. ~~Тогда n-1 последних~~ Возможный вариант пары чисел: $7(3\cdot(n-2))5$ и $1(3\cdot(n-1))$. Это работает

$$\begin{array}{r} 735 \\ \times\ 133 \\ \hline 2205 \\ +\ 2205\ \ \\ 735\ \ \ \ \\ \hline 97755 \end{array}$$

Число, получающееся при умножении $7(3)5$ на 3, имеет ~~почти~~ только одну нечётную цифру в конце. (общий вид $22(0\cdot(n-2))5$) ~~Тогда~~ Так как максимальное число, которое может получиться при сложении всех столбцов кроме первого, равно 7 (середина столбца нулевая, возможно только сложение $0+0+\ldots+0+5=5$; $2+0+0\ldots+0+5=7$; $2+2+0+0+\ldots+3=7$), переноса десятков не будет. Первая цифра всегда $9 = 7+2$

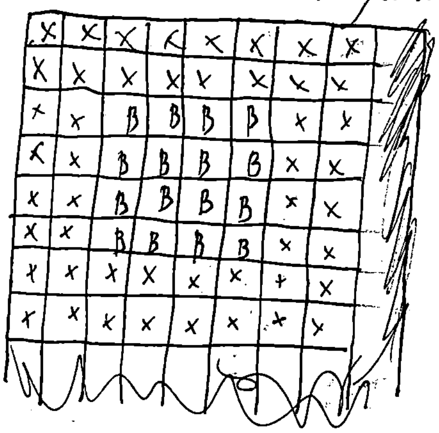
В итоге при умножении $7(3\cdot(n-2))5$ на $1(3\cdot(n-1))$ получаем число $\underbrace{9(7(n-1))(5(n-1))}_{2n-1}$, которое является ~~правильным~~ приятным

Серия примеров

так как нечётное число n может быть бесконечным, число пар чисел, удовлетворяющих условию, также бесконечно.

+

пример №4.



Необходимо всего 16 вампиров.

Так как каждый вампир в сумме бьёт 5 клеток, минимальное число вампиров без учета пересечения $64 : 5 \approx 13$ (округление в большую сторону. „Охват" поля у вампира – 5×5 (но бьет он только 5 клеток), а размер доски 8×8. Т.к. $8 \not\vdots 5$, вампиров необходимо больше (пересечений не избежать)

+

Бланк ответов