ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101483100029

Титульный лист

Направление
- ☐ Естественные науки
- ☒ Математика и информатика
- ☐ Экономика и управление
- ☐ Инженерные науки
- ☐ Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Фамилия ТЕРЕХИН

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 10 02 2002

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория Ф401

Телефон +79221556844

Дата 05 02 2002 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101483100029

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- ☐ Естественные науки
- ☒ Математика и информатика
- ☐ Экономика и управление
- ☐ Инженерные науки
- ☐ Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	38								
Балл члена жюри №2	50	38								

Итоговый балл 88

Подпись члена жюри №1 Филатов

Подпись члена жюри №2 Филатов

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Инвариантная часть.

Разобьём время 2 минуты на промежутки (шаги) по $\frac{1}{2^n}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Очевидно, что $2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

На каждом из промежутков (шагов) у лисы один и тот же алгоритм действия:
1) Делает куски равными
2) Откусывает от уже откусанного на этом шаге куска b_{n+1}.

Док-ем по индукции, что после n-го шага у одного из них остался кусок с массой: $3 - \sum_{i=1}^{n} b_i$, а у другого с массой: $3 - \sum_{i=1}^{n+1} b_i$

Б. И.: $n=0$: Куски имеют массы $\underset{M_{1,0}}{\underset{\parallel}{3}}$ и $\underset{M_{2,0}}{\underset{\parallel}{3-b_1}}$

П. И.: Пусть для $k \le n$: ~~$M_{1,k}$~~ =

Введём обозначение: $M_{1,n}$ – масса большего куска n-ом шаге
M_{2n} – масса меньшего куска на n-ом шаге

$M_{1,k} = 3 - \sum_{i=1}^{k} b_i$, $M_{2,k} = 3 - \sum_{i=1}^{k+1} b_i$

Ш.И.: Пок-ем, что при $k=n+1$ все выполняется:

1) Лиса уравняла массы кусков;

2) Откусила от куска, который больше до "уравнения кусков", b_{n+2}.

Получаем, что $M_{1,n+1} = M_{2,n} = 3 - \sum_{i=1}^{n+1} b_i$

$$M_{2,n+1} = M_{1,n} - b_{n+1} - b_{n+2} =$$

$$= M_{2,n} - b_{n+2} = 3 - \sum_{i=1}^{n+2} b_i$$

Ч.Т.Д.

+8

Пок-ем, что $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{3}{2}$. +20

Пусть $n=2k$: $\sum_{i=1}^{2k} b_i = \sum_{i=1}^{k} b_{2i} + \sum_{i=1}^{k} b_{2i-1} =$

Заметим, что $\forall m \in \mathbb{N}$: $b_m + b_{m+2} = \frac{2}{m(m+2)} + \frac{2}{(m+2)(m+4)} =$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+4} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+4}$$

Тогда $\sum_{i=1}^{k} b_{2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k+2}$ и $\sum_{i=1}^{k} b_{2i-1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2k} b_i = \frac{3}{2} - \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1} \longrightarrow \frac{3}{2},\ k \to \infty$$

По аналогии для $n=2k+1$

Бланк ответов 50 баллов

Тогда каждому медведю достанется кусок с массой: $M_{1,\infty} = M_{2,\infty} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(3 - \sum_{i=1}^{n} b_n\right)}_{M_{1,n}} = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \sum_{i=1}^{n+1} b_n\right) =$$

$$= 3 - \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ кг.} \quad V + 10$$

Тогда лиса получит $7 - \frac{3}{2}\cdot 2 = 4$ кг.

Пок-ем, что невозможного выбрать b_n так, что кому-то из медвежонков достанется больше.

1) Если ~~b_n $\forall n\in\mathbb{N}$ $b_n >$~~ $\exists M > 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$: $b_n \geq M$, то при $n > \frac{7}{M}$ оба куска сыра будут съедены лисой.

2) ~~Пусть~~ Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то по аналогии с пунктом 1). (Там найдётся $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} b_k > 7$).

3) Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по аналогии с решением задачи при $b_n = \frac{2}{n(n+2)}$ получим, что медведи съедят $3 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, т.е. одинаковое кол-во. $+12$

Вариативная часть. Блок 1.

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-x^2} f(x^{2n}t)\,dt, \text{ где } f(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin u}{u}, & u\neq 0\\ k, & u=0\end{cases}$$

1) Если $|x|=1$:

$F(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^0(\ldots)\,dt=0.$ +4

2) Если $|x|\neq 1$:

$f(x^{2n}t)=\dfrac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t}\longrightarrow 1,\ n\to\infty$ +

$f(x^{2n}t)$ — равномерно ~~непр~~ и огр. на $[-1,1]$:

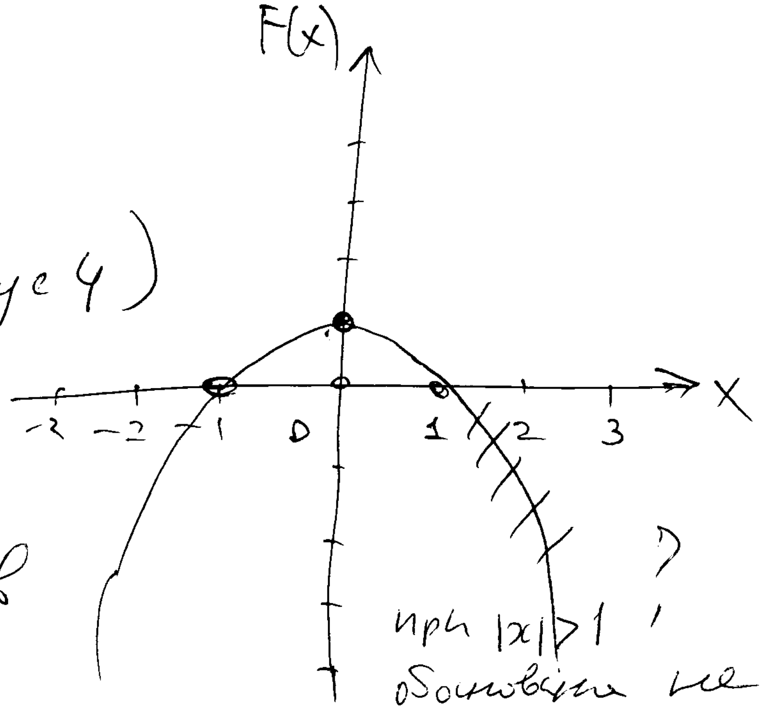
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-x^2} f(x^{2n}t)\,dt=\int_0^{1-x^2}\lim\limits_{n\to\infty}(f(x^{2n}t))\,dt=$

$=\int_0^{1-x^2}1\,dt$, если $k=1$, иначе не сущ-ет

$\parallel$

$1-x^2$ V

График $F(x)=1-x^2$:



$F(0)=?$ -4 (минус 4)

не иссл. непр-ть -8

$50-12=38$ баллов

при $|x|>1$? обоснования не проходят