



**ИЗУМРУД.СТУДЕНТ**  
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА



3101700087486

## Титульный лист

Направление  Естественные науки  Инженерные науки  
 Математика и информатика  Социальные и гуманитарные науки  
 Экономика и управление

Вариативный блок  1  2  3  4  5

Курс  1  2  3  4  5  отсутствует

Фамилия В Е Л И Ч К О

Имя А Л И С А

Отчество П А В Л О В Н А

Дата рождения 0 5 1 0 2 0 0 2

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория 2 0 1

Телефон 8 9 6 5 5 0 0 2 6 1 1

Дата 0 5 0 2 2 0 2 4

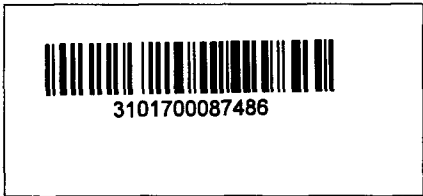
Подпись

Пример  
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф  
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



**ИЗУМРУД.СТУДЕНТ**  
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА



**Проверочный лист**  
**Заполняется участниками**

**Направление**     Естественные науки     Инженерные науки  
 Математика и информатика     Социальные и гуманитарные науки  
 Экономика и управление

**Вариативный блок**     1     2     3     4     5

**Курс**     1     2     3     4     5     отсутствует  
**Город участия**    Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

**Заполняется организаторами**

**Количество доп. листов**    **Количество черновиков к проверке :**  
**Время выхода с**    **до :**

**Протокол проверки**  
**Заполняется жюри**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	40	33								
Балл члена жюри №2	40	33								

**Итоговый балл**    73

**Подпись члена жюри №1**

*Филатова*

**Подпись члена жюри №2**

*Алиев*

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф  
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



# Бланк ответов

## 2. Инвариантная часть.

Рассмотрим условие задачи:

$$M = 7 \text{ кг} = M_1 + M_2$$

$$M_1 = 4 \text{ кг}, M_2 = 3 \text{ кг}$$

от 1<sup>го</sup> куска

1 минута:  $M_1 = 4 \text{ кг}$  "масса сыра столько сыра, что массы 1<sup>го</sup> и 2<sup>го</sup> кусков стали  
 $M_2 = 3 \text{ кг}$  одинаковыми".  
 Значит масса сыра 1 кг

$$M_1' = 3 \text{ кг}$$

$$M_2' = 3 \text{ кг}$$

мгновенно откусил от 1<sup>го</sup>  $v_1$  кг:  $M_1' = 3 - v_1$  кг  
 $M_2' = 3$  кг

суммарно масса сыра  
 $(1 + v_1)$  кг.

1/2 минута:

$$M_1 = (3 - v_1) \text{ кг}$$

$$M_2 = 3 \text{ кг}$$

"масса сыра от 2<sup>го</sup> куска столько сыра, что массы первого и второго кусков стали одинаковыми"  $\Rightarrow$   
 масса сыра  $v_1$  кг.

$$M_1' = (3 - v_1) \text{ кг}$$

$$M_2' = (3 - v_1) \text{ кг}$$

мгновенно откусил от 2<sup>го</sup>  $v_2$  кг:  $M_1' = (3 - v_1) \text{ кг}$   
 $M_2' = (3 - v_1 - v_2) \text{ кг}$

суммарно масса сыра  
 $(v_1 + v_2)$  кг.

1/4 минута

$$M_1 = (3 - v_1) \text{ кг}$$

$$M_2 = (3 - v_1 - v_2) \text{ кг}$$

"масса сыра от 1<sup>го</sup> куска столько сыра, что массы первого и второго кусков стали опять равны"  $\Rightarrow$

масса откусил  $v_2$  кг от 1<sup>го</sup> куска

$$M_1' = (3 - v_1 - v_2) \text{ кг}$$

$$M_2' = (3 - v_1 - v_2) \text{ кг}$$

мгновенно: от 1<sup>го</sup> куска  $v_3$  кг  $\rightarrow$   $M_1' = (3 - v_1 - v_2 - v_3) \text{ кг}$   
 $M_2' = (3 - v_1 - v_2) \text{ кг}$

суммарно масса сыра  
 $(v_2 + v_3)$  кг.

1/8 минута

$$M_1 = (3 - v_1 - v_2 - v_3) \text{ кг}$$

$$M_2 = (3 - v_1 - v_2) \text{ кг}$$

"масса от 2<sup>го</sup> куска столько сыра, что массы 1<sup>го</sup> и 2<sup>го</sup> кусков стали одинаковыми"  $\Rightarrow$  масса откусил  $v_3$  кг от 2<sup>го</sup> куска

$$M_1' = (3 - v_1 - v_2 - v_3) \text{ кг}$$

$$M_2' = (3 - v_1 - v_2 - v_3) \text{ кг}$$

мгновенно откусил  $v_4$  кг от 2<sup>го</sup> куска  $\Rightarrow$   $M_1' = (3 - v_1 - v_2 - v_3) \text{ кг}$   
 $M_2' = (3 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4) \text{ кг}$

суммарно масса сыра  
 $(v_3 + v_4)$  кг

и т.д.

2 минуты и осталось.

1) Докажем, что масса бесконечно много раз откусилась от каждого куска.

Рассмотрим время, в течение которого масса ела сыр:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Посчитаем, чему равно  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{2^2-1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2^3} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2^3} = \frac{7}{8} = \frac{2^3 - 1}{2^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = \frac{2^k - 1}{2^k} \quad \text{Докажем эту индукцию по методу математ. индукции!}$$

Б.У.  $k=1$   $\sum_{n=1}^1 \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}$  п.ч.

п.ч. предположим, что для  $k$  верно, то есть  $\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = \frac{2^k - 1}{2^k}$

И.И.  $\sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{\text{п.ч.}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^k - 1) + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} = \text{п.ч.}$

Следовательно, время, которое ела мышь:  $1 + \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{2^k - 1}{2^k} = \frac{2^k + 2^k - 1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^k}$

Сказано, что мышь ела 2 минуты,  $k$ -каково число кусочков сыра.

Рассмотрим  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}}{2^k} - \frac{1}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{2^k} = 2 - 0 = 2$

т.е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0$  как бесконечно малая.

Иными словами, за 2 минуты мышь успеет бесконечно много раз порезать сыр т.к. при  $k \rightarrow \infty$  время её стремится к 2м минутам. Значит, раз она успеет бесконечно много раз отрезать сыр, то она бесконечно много раз откусит от каждого кусочка.

2) Сколько сыра осталось мышь за 2 минуты, если  $b_n = \frac{2}{n(n+2)}$

Мышь съедает:  $(1+b_1) + (b_1+b_2) + (b_2+b_3) + (b_3+b_4) + \dots = 1 + 2 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 + 2 \cdot b_4 + \dots + 2 \cdot b_{k-1} + b_k = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{k-1} b_n + b_k$

Нужно найти  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$

Заметим, что  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$ . Значит, сумму можно переписать как:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Рассмотрим  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} =$

Бланк ответов

Суммируем,  $\sum_{n=1}^t b_n = \sum_{n=1}^t \frac{2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$ .

Значит  $\sum_{n=1}^{k-1} b_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k-1+1} - \frac{1}{k-1+2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

Тогда,  $1 + 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + b_k = 1 + 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} =$   
 $= 1 + 2 + 1 - \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = 4 - \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+2}$

Тогда,  $\lim_{k \rightarrow \infty} 4 - \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k}\right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{k+1}\right) +$   
 $+ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k+2}\right) = 4.$  (Увеличим  $k \rightarrow \infty$  т.к. за 2 минуты  
 мяса больше отпустило  $\infty$  кол-во (раз))

Значит за эти 2 минуты мяса съели 4 кг сыра.

3) Сколько осталось килограмм швейцарки? +12

Всего швейцарки осталось ~~7~~  $7 - 4 = 3$  кг.

Килограмм из них осталось поровну  $\frac{3}{2} = 1,5$  кг.

Ответ: 2) мяса съели 4 кг сыра  
 3) швейцарки осталось по 1,5 кг сыра

40 баллов

не док, что нельзя брать  $b_n$  так,  
 чтобы осталось разное кол-во сыра

Блок 3. Задача по загрузку посудомоечной машины.

1) Таблицы:

1) Типы\_посуды., в ней будем хранить вид посуды (тарелка, кастрюля, сковорода, кружка, ручер, то есть первичный кабариты данного вида посуды. (высота/ширина/глубина))

2) Посуда.

В этой таблице будем хранить информацию о посуде, которая есть в доме. где тоже храним идентификатор посуды, тип (ссылаю на таб 1), ~~статус~~ статус загрузки, приоритет мытья, (первич. номер) внешний ключ, степень загрязненности

3) Мытье.

В этой таблице храним информацию о циклах мытья посуды: идентификатор мытья (первич. ключ), режим (ссылаю на таблицу 4), ~~номер~~ номер программы, ~~номер~~ номер полки (на таб. 5), идентификатор посуды, номер её положения на полке, время начала ~~мытья~~ мытья, время окончания мытья.

4) Режим:

идентификатор режима (первич. ключ)  
название режима  
расход воды.

5) полка:  
номер полки (первич. ключ), идентификатор полки, внешняя полка, высота/ширина/глубина

6) Статус посуды: грязная / чистая и степень загрязненности (по умолчанию Оди чистой посудой).

