ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101991100911

Титульный лист

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок [x] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Фамилия	ХОРОШАВИН
Имя	ЕВГЕНИЙ
Отчество	АНДРЕЕВИЧ
Дата рождения	15 01 2003
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	Ф401
Телефон	89505598436

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101991100911

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- ☐ Естественные науки
- ■ Математика и информатика
- ☐ Экономика и управление
- ☐ Инженерные науки
- ☐ Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	18								
Балл члена жюри №2	50	18								

Итоговый балл 68

Подпись члена жюри №1 Филатова

Подпись члена жюри №2 Филатова

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

ИНВАРИАНТНАЯ ЧАСТЬ. Пусть перед n-ой итерацией есть куски размера m_1 и m_2.

n-ная итерация Лиси выглядит так:

- выбирается бóльший кусок сыра
- от бóльшего Лиса откусывает $|m_1 - m_2|$ кг сыра за $\frac{1}{2^{n-1}}$ минуты (2^{1-n})
- от бывшего бóльшего куска она откусывает b_n кг сыра за 0 минут.

Таким образом, итерация длится $\frac{1}{2^{n-1}}$ минуты, за которые Лиса съедает $|m_1 - m_2| + b_n$ кг сыра от бóльшего куска. На следующей итерации бóльшим куском будет другой, а изначальная разница в размерах составит b_n кг.

Итерации окончились по истечении 2 минут. Сформулируем и докажем утверждения:

Утв. 1. Перед n-ной итерацией у Лисы будет 2^{2-n} минут, где $n \in \mathbb{N}$.

~~Док-во~~: Используем метод математической индукции.

База индукции: $n=1$.

Перед первой итерацией у Лисы 2 минуты. $2 = 2^{2-1} = 2^{2-n}$.

Предположение индукции → Шаг индукции.

Перед n-ой итерацией у Лисы 2^{2-n} минут. На итерацию она тратит 2^{1-n} минут. Тогда перед $(n+1)$-ой итерацией у неё будет $2^{2-n} - 2^{1-n} = 2^{1+1-n} - 2^{1-n} =$
$= 2 \cdot 2^{1-n} - 2^{1-n} = 2^{1-n} = 2^{2-n-1} = 2^{2-(n+1)}$ минут. ◀.

Утв. 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ у Лисы будет время для совершения итерации.

▷ Перед n-ой итерацией (т.е. после $(n-1)$ итерации) у Лисы будет свободно 2^{2-n} минут, а для совершения итерации нужно 2^{1-n} минут. $2^{2-n} > 2^{1-n}$, значит у Лисы всегда будет время на итерацию. ◀.

Следствие 1. ~~У~~ Лиса ~~[illegible]~~ совершит бесконечное кол-во итераций. $\checkmark$ +8

Утв. 3. Для любого n верно:

- Лиса съедает за итерацию:
  - $1 + b_1$ кг ~~за~~ (при $n = 1$)
  - $b_{n-1} + b_n$ кг (при $n > 1$)
- После n-ой итерации разница между кусками составляет b_n кг.

▷ Используем метод мат. индукции:

База индукции ($n = 1$).

Перед Лисой куски в 4 кг и 3 кг. Она съедает разницу и ещё b_1 от первого куска. Итого — $1 + b_1$ кг. При этом размеры кусков составят $3 - b_1$ и 3 кг соответственно, т.е. разница — b_1 кг.

Предположение индукции → Шаг индукции.

После n-ой итерации разница составляет b_n кг. ~~На~~ За $(n+1)$-ую итерацию Лиса съест b_n кг разницы от большего куска и ещё b_{n+1} от него же. Итого — $b_n + b_{n+1}$. При этом разница сначала станет равной 0, а потом возрастёт до b_{n+1}. ◀

Утв. 4. Если n — чётно, то Лиса ~~съест~~ будет есть 2-ой кусок, иначе — первый.

▷ На первой итерации она съест часть первого куска, из-за чего он станет меньшим, поэтому на второй итерации будет съедена часть второго и так далее. ◀

Следствие 2. От первого куска Лиса откусит на нечетных итерациях, т.е по Утв. 3: сумма откушенного от 1-ого составит $\cancel{1+b_1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$ $1 + b_1 + \sum_{\substack{n=3 \\ n\text{-нечет.}}}^{\infty} (b_{n-1} + b_n) =$

$$= 1 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (кг)}.$$

От второго же Лиса будет кусать на чётных итерациях, в сумме —

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n\text{-чёт.}}}^{\infty} (b_{n-1} + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ (кг.)}$$

Следствие 3. После 2 минут 1-ый кусок будет весить $4 - (1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n) =$ $= 3 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (кг), а второй $3 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (кг), т.е. для любых b_n куски будут равны.

Бланк ответов

Пусть $b_n = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{n+2}{n(n+2)} - \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$, тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{3}{2}. \quad \checkmark +20$$

т.е. каждому медвежонку достанется по $3 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$ (кг). $\checkmark$

Лиса же съест $1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 4$(кг). $\checkmark$

50 баллов

Ответ:
- бесконечность доказана +8
- Лиса съела 4 кг. +10 +20
- каждый медведь получил по $3/2$ кг. $\checkmark$ +10
- неравенство невозможно. +2

Вариативная часть.

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2} f(x^{2n}t)\,dt, \text{ где } f(u) = \begin{cases}\frac{\sin u}{u}, & u \neq 0,\\ k, & u = 0.\end{cases}$$

- $F(0) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(0)\,dt = \lim_{n\to+\infty} k = k.$ +4

интеграл по обл. меры 0

- $F(-1) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^0 f((-1)^{2n}t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^0 f(1^{2n}t)\,dt = F(1)$ +4

- $x \notin \{-1; 0; 1\}$:

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2} f(x^{2n}t)\,dt.$$

В таком случае $x^{2n} \neq 0$, значит $x^{2n}t = 0 \Longleftrightarrow t = 0$. Таким образом, мы можем считать, что $x^{2n}t \neq 0$, пренебрегая одной точкой в обл. интегрирования. Тогда $f(x^{2n}t) = \frac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t}$.

Для $\sin u$ запишем ряд Тейлора: $\sin u = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m u^{2m+1}}{(2m+1)!}$, тогда:

$$f(x^{2n}t) = \frac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(x^{2n}t)^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{4nm}}{(2m+1)!}t^{2m}.$$

$$F(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{4mn}}{(2m+1)!}\cdot t^{2m}\,dt=\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m x^{4mn}}{(2m+1)!}\int_0^{1-x^2}t^{2m}\,dt\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m x^{4mn}}{(2m+1)!}\cdot\frac{t^{2m+1}}{2m+1}\Big|_0^{1-x^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{4mn}}{(2m+1)!}\cdot\frac{(1-x^2)^{2m+1}}{2m+1}=$$

$$=\lim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(1-x^2)^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}\lim_{n\to+\infty}x^{4mn}.$$

Ошибка при вычислении суммы ряда

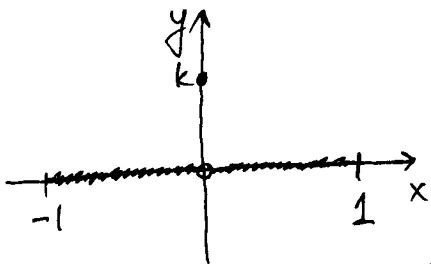
т.к. $x\in[-1,1]$ $\lim_{n\to+\infty}x^{4mn}=0.$

$$F(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(1-x^2)^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}\lim_{n\to+\infty}x^{4mn}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(1-x^2)^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}\cdot 0=0.$$

Здесь раскладывать в ряд ни к чему. Лучше перейти к пределу под знаком интеграла

Значит,

$$F(x)=\begin{cases}k, & x=0,\\ 0, & x\in[-1;1]\setminus\{0\}.\end{cases}$$



Для непрерывности необходимо: $\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)=\lim_{x\to0^-}F(x)$, т.е.

$0=k=0.$

Ответ: $\cdot\ F(x)=\begin{cases}k, & x=0,\\ 0, & x\in[-1;1]\setminus\{0\}.\end{cases}$

$\cdot$ F непрерывна при $k=0$.

неверный ответ

+10 за идею (к сожалению, не доведено до конца)

+4 +4 +10 = 18 баллов

Бланк ответов