ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101649086016

Титульный лист

Направление	☐ Естественные науки	☐ Инженерные науки
	☒ Математика и информатика	☐ Социальные и гуманитарные науки
	☐ Экономика и управление	

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Фамилия КРЕМКО

Имя САВВА

Отчество МИХАЙЛОВИЧ

Дата рождения 06 05 2004

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 201

Телефон 89826771861

Дата 05 02 2024 **Подпись** Кремко

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101649086016

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок [x] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [ ] 1 [ ] 2 [x] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	50								
Балл члена жюри №2	50	50								

Итоговый балл 100

Подпись члена жюри №1 Филатова

Подпись члена жюри №2 Филатова

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариантная часть

Назовём k-итерацией ~~действием~~ действие лисы, когда она съедает за $\frac{1}{2^{k-1}}$ минут большую часть одного куска а затем моментально съедает b_k от другого.

Тогда ~~количество~~ вес ~~сыра каждого куска~~ веса кусков после k итерации будут равны $3-S_k$ и $3-S_{k-1}$ (без учета порядка кусков)

где $S_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$

Тогда лиса съела всего после k итерации $7-(3-S_k+3-S_{k-1}) =$

$= 1+S_k+S_{k-1}$

- Лиса бесконечно много раз откусила от каждого куска?

Пусть лиса ~~конечное~~ проделала k итераций ($k<\infty$) тогда всего времени она затратила $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}$ минут

$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-(1/2)^k}{1-1/2} < 2$, хотя оно остановилось ровно после 2 минут

противоречие $\Rightarrow$ лиса сделала беск. кол-во итераций V +8б

на нечетную итерацию лиса ест от 1-го куска, а на четн. от второго

$\Rightarrow$ беск кол-во раз откусила от каждого.

- Сколько сыра досталось лисе, если $b_k = \frac{2}{k(k+2)}$.

как показано выше лиса съела ~~после~~ за k итераций

$1+S_k+S_{k-1}$ ~~кусо~~ сыра при $k\to\infty$ получим $1+2\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ V

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ *

* част. сумма ряда $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}$ V

Тогда лиса съела $1+2\cdot\frac{3}{2} = 4$ кг сыра

- Сколько сыра досталось каждому медвежонку?

т.к. в 2 кусках сыра остаётся $3-S_k$ и $3-S_{k-1}$ при $k\to\infty$

в кусках останется по $3-3/2 = 3/2$ кг сыра V

- Можно ли первому медвеженку достаться больше?

В предположении, что лиса не может есть нулевое кол-во сыра т.е. $b_k > 0 \; \forall k$ следует что ряд не является конечным

~~А т.е.~~ ~~S~~ А в силу того что лиса не может есть отрицательное кол-во сыра то ряд из b_k ~~сх~~ всегда сходится

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1}) = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ (т.е. медвежатам всегда достанется одинаковое количество сыра)

~~Ответ: Лиса, они~~

50

Вариативный блок №1

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-x^2} f(x^{2n}\cdot t)\,dt \qquad f(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & u\neq 0 \\ k, & u=0 \end{cases} \qquad x\in[-1,1]$$

Найдем для начала $F(\pm1)$ и $F(0)$ +4

$$F(\pm 1) = \lim_{n\to\infty}\int_0^0 f(t)\,dt = 0 \qquad F(0) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(0)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 k\,dt = k$$ +4

$\measuredangle$ $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ тогда $1-x^2>0$ и $f(x^{2n}\cdot t) = \frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}$

$t>0$ и $x^{2n}>0 \Rightarrow t\cdot x^{2n}>0$ ~~тогда~~

($f(0)$ интегрируется по множеству меры нуль, поэтому не учитываем

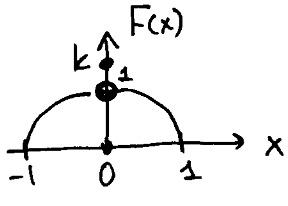
т.к. при $x>0$ $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ то

$$\int_0^{1-x^2}\frac{x^{2n}\cdot t-\frac{x^{6n}t^3}{6}}{x^{2n}\cdot t}\,dt < \int_0^{1-x^2}\frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}\,dt < \int_0^{1-x^2}\frac{x^{2n}\cdot t}{x^{2n}\cdot t}\,dt = 1-x^2$$

найдём предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-x^2}\left(1-\frac{x^{4n}t^2}{6}\right)dt = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-x^2-\int_0^{1-x^2}\frac{x^{4n}\cdot t^2}{6}\,dt\right) =$

$= 1-x^2 - \frac{1}{6}\lim x^{4n}\int_0^{1-x^2} t^2\,dt = 1-x^2$ (т.к. $|x|<1$ и $\int_0^{1-x^2} t^2\,dt$ конечный не зависит от n)

$\Rightarrow$ по Теореме о 2 полицейских $F(x) = 1-x^2$, если $|x|\neq 1, x\neq 0$



т.е. $F(x)$ терпит разрыв 1-го рода в $x=0$

$\Rightarrow F(x)$ будет непр $\Leftrightarrow k=1$

Ответ: ~~k=1~~ $F(x) \in C([-1,1])$ при $k=1$

50

Бланк ответов