ИЗУМРУД.СТУДЕНТ

ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101479101019

Титульный лист

Направление	☐ Естественные науки	☐ Инженерные науки
	☒ Математика и информатика	☐ Социальные и гуманитарные науки
	☐ Экономика и управление	

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Фамилия ОБЯЗАЛОВ

Имя МАКСИМ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 13 09 2002

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория Ф401

Телефон +79527386013

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101479101019

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки
☒ Математика и информатика ☐ Социальные и гуманитарные науки
☐ Экономика и управление

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	48	31								
Балл члена жюри №2	48	31								

Итоговый балл 79

Подпись члена жюри №1 Филатова

Подпись члена жюри №2 Филатова

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариативная часть.

$M = 7$ $M_1 = 4$ $M_2 = 3$ [кг] Откушено:

Минута 1 $1+1/2$ $1+1/2+1/4$

1 кусок $1+b_1$ b_2+b_3

2 кусок b_1+b_2

~~Ан~~ Лиса кусала через каждые $\frac{1}{2^n}$ минут и в сумме кусала 2 мин.

$$2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n};$$ бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b_1 = \frac{1}{2}$;

$q = \frac{1}{2}$; $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$, т.е. Лиса кусала бесконечно много раз, ч.т.д.

V +8

Лиса кусала от 1-го куска $(1+A)$ кг, от 2-го (A) кг (т.к. кусала бесконечно много и всё меньшими кусочками).

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ ; \quad b_n = \cancel{\frac{2}{n}} \ \frac{2}{n(n+2)} = \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n+2} =$$

$$= \frac{B_1(n+2) + B_2(n)}{n(n+2)} \Rightarrow B_1(n+2) + B_2 \cdot n = 2 \Rightarrow (B_1 + B_2)n + 2B_1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$\Downarrow$

$A = 1{,}5$ В итоге Лиса всего съела $(1+2A) = 4$ кг сыра

+20 V

первому и второму медвежатам досталось по $m_1 = m_2 = 3 - A = 1{,}5$ кг сыра

$m_1 = 1{,}5$ кг

$m_2 = 1{,}5$ кг

Лиса у каждого куска откусывает $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$

У 2-го куска откусывает $b_{+\infty} \to 0$? Непонятная, нечёткая аргументация, но −2б

Чтобы первому досталось больше, его нужно, чтобы $b_{+\infty}$? был больше 0. и не стремился к 0 (по условию), т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, но нельзя подобрать такие b_n, чтобы только некоторый последний $b_{+\infty}$ подходил под критерий выше, иначе ряд ~~отку~~ масс откусываемых кусков не будет убывающим, а, значит, не будет сходящимся.

+22

Нельзя подобрать b_n такие, чтобы масса 1-го куска m_1 после откусываний была больше массы второго куска m_2

48 баллов

Блок 1!

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1-x^2} f(x^{2n} \cdot t)\,dt \ ; \quad f(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u}; & u \neq 0 \\ k; & u = 0 \end{cases}$$

что здесь имеется ввиду?

Пусть $k = \lim\limits_{n\to 0} \frac{\sin n}{n} = 1$ ($k \not\to \infty$ (параметр)).

Если $k = const$, то зн-е k не повлияет на $F(x)$ (будет только разрыв 1-го рода)

$$\int_0^{1-x^2} f(x^{2n}t)\,dt = \int_0^{1-x^2} \frac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t}\,dt = \begin{cases} a = 0 \\ \cancel{b = 1-x^2} \\ y = x^{2n}t \end{cases} = \frac{1}{x^{2n}} \int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy$$

$b = \frac{1-x^2}{x^{2n}}$

$$\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy = \begin{cases} \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \\ u = \frac{1}{y} \quad du = -\frac{1}{y^2} \\ dv = \sin y\,dy \quad v = -\cos y \end{cases} = -\frac{\cos y}{y}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos y}{y^2}\,dy$$

~~Это~~ интеграл не выражается в элементарных функциях

$$\int_a^b \frac{\cos y}{y^2}\,dy = \begin{cases} u = \cos y & du = \sin y\,dy \\ dv = \frac{dy}{y^2} & v = -\frac{1}{y} \end{cases} = -\frac{\cos y}{y}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy$$

Таким образом:

$$\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy = -\frac{2\cos y}{y}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy \Rightarrow \int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\cos y}{y}\Big|_a^b$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-x^2} \frac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2n}} \cdot \frac{\cos y}{y}\Big|_0^{\frac{1-x^2}{x^{2n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}\left(\frac{\cos\frac{1-x^2}{x^{2n}}}{\frac{1-x^2}{x^{2n}}} - n\cos\frac{1}{n}\right)$$

Бланк ответов

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2n}}\left(\frac{\cos\frac{1-x^2}{x^{2n}}}{\frac{1-x^2}{x^{2n}}}-\cancel{?}\right)\right);\quad x\in[-1;1]$$

$n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ v

$F(x)$ непрерывна, если $k=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ Почему

$F(x)$ – чётная ф-я

+4 +4 $(1-x^2)=1$

$$\begin{cases} F(1)=0;\ F(-1)=0;\ F(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-x^2} k\,dt=k \\ \lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-x^2}\frac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t}\,dt=1=\cancel{\lim} \end{cases}$$

ПОЧЕМУ?

Нет обоснов непр-ти −2 б

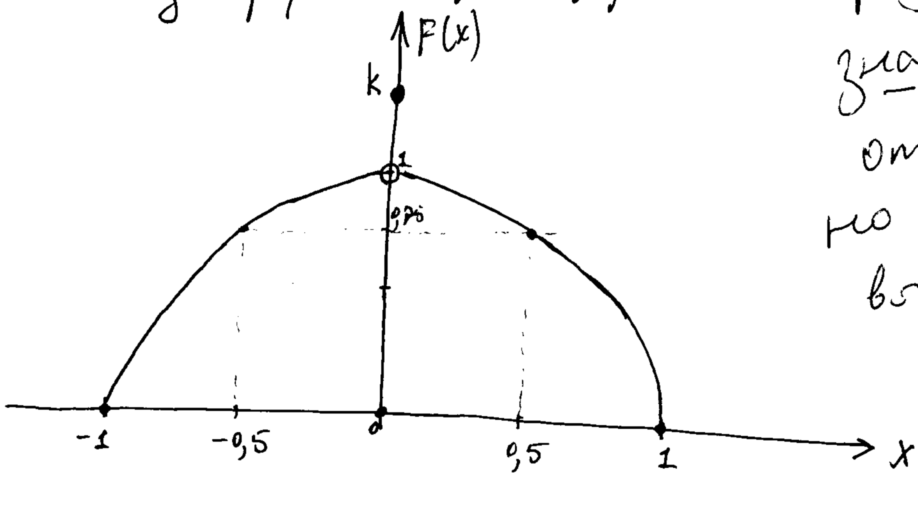
Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{2n}\cdot t)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(x^{2n}t)}{x^{2n}t}$ на $x\in(0;1)$:

аргумент $x^{2n}t\to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{2n}t)=1$, т.е.

$F(x)\to(1-x^2)$ на $x\in(-1;1)\setminus\{0\}$

Не обоснован пред переход под знаком интеграла −12 (минус 12)

Эскиз графика ф-и $F(x)$:



ответ верный, но попытки выразить $\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy$ неумелые, за них минус −5 баллов

$$F(x)=\begin{cases} k; & x=0 \\ (1-x^2); & x\in[-1;1]\setminus\{0\} \end{cases}$$

50 − 12 − 5 − 2 = 31

Бланк ответов