ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101244086498

Титульный лист

Направление	☐ Естественные науки ☒ Математика и информатика ☐ Экономика и управление	☐ Инженерные науки ☐ Социальные и гуманитарные науки
Вариативный блок	☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5	
Курс	☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует	

Фамилия РОЗЕНБЕРГ

Имя ЛЕОНИД

Отчество ВАЛЕРЬЕВИЧ

Дата рождения 04 07 2003

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 201

Телефон 89221948846

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101244086498

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок [x] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [ ] 1 [ ] 2 [x] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	40								
Балл члена жюри №2	50	40								

Итоговый балл 90

Подпись члена жюри №1 Филатова

Подпись члена жюри №2 Филатова

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

1) Инвариантная часть.

Вопрос № 1| На n-ый укус Лиса тратит $\frac{1}{2^{n-1}}$ минут. $n = 1, 2, 3, \ldots$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$). Т.к. все слагаемые этой суммы положительны, ~~при~~ на любое конечное количество укусов Лиса потратит менее 2 минут. Значит Лиса сделала бесконечное количество укусов. Поскольку Лиса кусала куски по очереди, она и от каждого конкретного куска откусила бесконечное количество раз. +8

Вопрос № 2|

За 1-ый „подход" Лиса съела $1+b_1$ кг сыра, За 2-ой: b_1+b_2 кг, За 3-ий: b_2+b_3 кг, и т.д. Итого Лиса съела:

$1+b_1+b_1+b_2+b_2+b_3+b_3+b_4+\ldots = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ кг сыра. Вычислим сумму ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+2)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} \frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n+2}{n(n+2)} - \frac{n}{n(n+2)}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{N-1}} - \frac{1}{N+1} + \cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+2}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{N+2}}_{\to 0}\right) = \frac{3}{2}. \quad V$$

Лиса съела $1+2\cdot\frac{3}{2} = 4$ кг сыра. +20

Вопрос № 3|

От 1-ого куска сыра Лиса отъела $1+b_1+b_2+\ldots = 1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ кг сыра.

От 2-ого куска сыра Лиса отъела $b_1+b_2+b_3+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$ кг сыра. } =>

=> у каждого медвежонка осталось $\frac{3}{2}$ кг сыра. V

Вопрос № 4|

Из рассуждений вопроса № 3 следует, что у каждого медвежонка остаётся $3-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ кг сыра. Вне зависимости от выбора b_n, сыра у медвежат останется поровну, следовательно описанная в условии ситуация недостижима. V

50 баллов

2) Вариативная часть. Блок № 1)

$$F(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2} f(x^{2n}\cdot t)\,dt,\quad f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ K, & x=0.\end{cases}$$

Рассмотрим 3 случая:

1. $x=0$

$$F(0)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 K\,dt=\lim_{n\to+\infty}K=K.$$ +4

2. $x=\pm 1$.

$$F(1)=F(-1)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^0 f(t)\,dt=0$$ +4

3. $x\in(-1,0)\cup(0,1)$

$$F(x)\overset{*}{=}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2}\frac{\sin x^{2n}t}{x^{2n}t}\,dt\overset{***}{=}\int_0^{1-x^2}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x^{2n}t}{x^{2n}t}\right)dt\overset{**}{=}\int_0^{1-x^2}dt=1-x^2$$

* Можно считать, что $x^{2n}t\neq 0$, т.к. интеграл функции $f_1(t)=\frac{\sin x^{2n}t}{x^{2n}t}$ не зависит от значения в одной конкретной точке.

** В силу 1-ого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. При $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ и $n\to+\infty$ величина $x^{2n}t$ – бесконечно малая $(x^{2n}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0)$, следовательно можем применить замечательный предел. ✓ $\lim_{t\to t}($

О какой функции идёт речь?

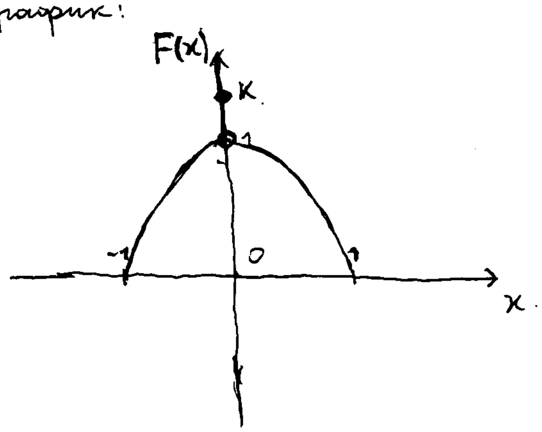
*** Предел можно занести под знак интеграла в силу непрерывности функции $f_2(n)=\int_0^{1-x^2}\frac{\sin x^{2n}t}{x^{2n}t}\,dt$ при любом фиксированном $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ ~~при больших n, т.е., например, на промежутке $n\in[1,+\infty)$~~ при $n\in[1,+\infty)$

В итоге $F(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\in[-1,1],\ x\neq 0.\\ K, & x=0.\end{cases}$

Считаю обоснование пред. пер. под знаком $\int$ недостаточно строгим

−10 баллов.

График:



Очевидно, что при $K=1$ $F(x)$ непрерывна на $[-1,1]$, т.к. устраняется единственный на отрезке $[-1,1]$ разрыв в точке 0. ✓

40б

Бланк ответов