ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101166085819

Титульный лист

Направление	☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки ☒ Математика и информатика ☐ Социальные и гуманитарные науки ☐ Экономика и управление
Вариативный блок	☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
Курс	☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует
Фамилия	БЛИНОВ
Имя	ОЛЕГ
Отчество	СЕРГЕЕВИЧ
Дата рождения	29 08 2005
Город участия	ЕКАТЕРИНБУРГ
Аудитория	201
Телефон	89041623755

Дата 05 02 2024 **Подпись** Блинов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101166085819

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] Естественные науки
- [ ] Инженерные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Социальные и гуманитарные науки
- [ ] Экономика и управление

Вариативный блок [ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [x] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	30	23								
Балл члена жюри №2	30	23								

Итоговый балл 53

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2 Филатова.

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Вариативная часть. Блок 2. Математика.

Заметим, что при условии выполнения равенства из условия задачи, числа на побочной диагонали матрицы A равны нулю. Док-во: рассмотрим диагональные эл-ты побочной диагонали $a_{i\,n+1-i}$. Для них, по условию, верно равенство: $a_{i\,n+1-i} = -a_{n+1-n-1+i\;n+1-i} = -a_{i\,n+1-i}$. То есть $a_{i\,n+1-i} = -a_{i\,n+1-i}$. Отсюда следует, что все ~~диаго~~ эл-ты побочной диагонали матрицы A равны нулю (они должны равняться сами себе, но с отрицательным знаком, что верно только для нуля).

Т. о., матрица из условия задачи имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & 0 \\ a_{21} & \dots & \dots & 0 & -a_{1\,n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n-1\,1} & 0 & \dots & \dots & -a_{12} \\ 0 & -a_{n-1\,1} & \dots & -a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу A^*, полученную из A переставлением пар строк $(i, n+1-i)$ (здесь i пробегает промежуток от 1 до $\left[\frac{n}{2}\right]$, где $[x]$ - целая часть x).

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -a_{n-1\,1} & \dots & -a_{21} & -a_{11} \\ a_{n-1\,1} & 0 & \dots & -a_{22} & -a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & -a_{1\,n-1} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Из того, что при перестановке двух строк матрицы, её определитель меняет знак, следует, что $|A^*| = |A|\cdot(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

При транспонировании матрицы её определитель не меняется. Отсюда следует, что $|A^*| = |(A^*)^T| = \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1\,1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\ -a_{n-1\,1} & 0 & \dots & a_{22} & a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & 0 & -a_{1\,n-1} \\ -a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

По строению матрицы $(A^*)^T$ очевидно, что

$$|(A^*)^T| = (-1)^n \cdot |A^*|$$

(Т.к. если мы вынесем минусы из каждой из строк определителя, мы получим определитель м-цы A^*. При умножении строки м-цы на число k, её определитель ~~уве ув~~ изменяется в k раз).

(продолж. на сл. листе)

Из утверждений выше следует, что:

$|A^*| = (-1)^n \cdot |A^*|$

$|A^*| - (-1)^n \cdot |A^*| = 0$

$|A^*| \cdot (1 - (-1)^n) = 0$

Док-во „по формуле" верное
ответ „по формуле" не верный

$\left[\begin{array}{l} |A^*| = 0 \\ 1 - (-1)^n = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} |A| \cdot (-1)^{[\frac{n}{2}]} = 0 \\ n \vdots 2 \\ \text{(делимое)} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} |A| = 0 \\ n \vdots 2. \end{array}\right.$ (23 балла)

Получаем ответ: при нечётных n определитель м-цы A равен нулю, а при чётных n он может принимать ~~люб~~ значение. $n=2$ только ≥ 0.

Инвариантная часть. почему любые? Примера нет

$M_{сыра} = 7$ кг.

$M_1 = 4$ кг. $M_2 = 3$ кг.

I) Д-ть, что лиса откусила от каждого куска бесконечно много раз.

рассмотрим действие лисы:

0) $4 > 3$

1) $3 - b_1 < 3$

2) $3 - b_1 > 3 - b_1 - b_2$

3) $3 - b_1 - b_2 - b_3 < 3 - b_1 - b_2$

4) $3 - b_1 - b_2 - b_3 > 3 - b_1 - b_2 - b_3 - b_4$

Рассмотрим последовательность $b_1\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Докажем, что эта посл. бесконечна. Пусть это не так. Тогда $\exists\, k > 0$ - такое натуральное число, что $3 - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_k = 3 - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_{k-1}$ (т.к. по условию „Лиса всё делила и делила сыр", ожидая равенства массы его кусков, (предположим) что ~~она~~ смогла достичь, остановившись после ~~k-го куска~~ укуса b_k сыра). Из равенства следует, что $b_k = 0$. Это невозможно, т.к. Лиса не могла откусить от сыра ноль килограмм. Полученное противоречие доказывает исходное утверждение. По времени лиса также уложилась в ровно две минуты, т.к. $1 + \sum_{n=1} \frac{1}{2^n} = 2$. $+\infty$

II) Сколько сыра досталось Лисе за две минуты, если $b_n = \frac{2}{n(n+2)}$, $n = 1, 2, 3$?

$$1+\underset{\text{(от 1-го куска)}}{b_1}+\underset{\text{(от второго куска)}}{b_1}+b_2+b_2+b_3+b_3+\ldots+b_n+b_n+\ldots=1+2b_1+2b_2+2b_3+\ldots+2b_n+\ldots=$$

$$=1+2(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots)=1+4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+2)}.$$

кг. сыра

III) Каждому медвежонку досталось по:

$$\frac{7-1-4\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+2)}}{2}=3-2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+2)}\text{ кг. сыра.}$$

сумма ряда не найдена

минус 20

IV) Ответ: нет, не может.

Д-во: Пусть это не так, и Лиса может выбрать b_n так, чтобы первому медвежонку досталось больше. Это значит, что $3-\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i>3-\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i$, что, очевидно, приводит к противоречию (так как утверждение $3>3$ неверно). Полученное противорение доказывает ответ.

30б

Бланк ответов